

# Apuntes de *EcoPol*

Joaquín Martínez Ojeda

Otoño 2026



El curso de Economía Aplicada dictado por el profesor Óscar Landerretche (ramo conocido como EcoPol) en la Universidad de Chile, concentra múltiples fuentes de distintas áreas de la economía. Por ello he juntado en un solo documento una parte considerable de la materia vista en clases.

Documento no oficial, cualquier error por favor notificarme a mi correo [joamartine@fen.uchile.cl](mailto:joamartine@fen.uchile.cl).



---

# ÍNDICE GENERAL

|                                                            |               |
|------------------------------------------------------------|---------------|
| <b>1. La economía descentralizada</b>                      | <b>9</b>      |
| 1.1. La economía descentralizada . . . . .                 | 9             |
| 1.2. Economías Walrasianas . . . . .                       | 11            |
| 1.3. Caja de Edgeworth . . . . .                           | 15            |
| 1.4. Economía de intercambio bajo el criterio de Pareto .  | 17            |
| 1.5. Eficiencia de los mercados . . . . .                  | 21            |
| 1.6. Teoremas fundamentales de la economía del bienestar   | 23            |
| 1.7. Producción en equilibrio general . . . . .            | 26            |
| <br><b>2. El problema del tiempo y del riesgo</b>          | <br><b>41</b> |
| 2.1. Optimización intertemporal y aversión al riesgo . . . | 41            |
| 2.2. Modelo de consumo intertemporal en dos períodos .     | 42            |

|                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3. El perfil del consumidor . . . . .                     | 46         |
| 2.4. Restricciones de liquidez . . . . .                    | 49         |
| <b>3. El problema de la cooperación y la coordinación</b>   | <b>55</b>  |
| 3.1. Juegos en forma normal . . . . .                       | 56         |
| 3.2. Juegos secuenciales . . . . .                          | 64         |
| 3.3. Competencia imperfecta . . . . .                       | 71         |
| 3.4. Equilibrios cooperativos: acuerdos colusivos . . . . . | 80         |
| <b>4. El problema de la delegación y la ignorancia</b>      | <b>91</b>  |
| 4.1. Problemas de agencia . . . . .                         | 91         |
| 4.2. Riesgo moral . . . . .                                 | 96         |
| 4.3. Selección adversa . . . . .                            | 98         |
| <b>Appendices</b>                                           | <b>105</b> |
| <b>A. La economía descentralizada</b>                       | <b>105</b> |
| A.1. Optimización de una Cobb-Douglas . . . . .             | 105        |
| A.2. Demostraciones . . . . .                               | 107        |
| A.3. Equilibrio general con producción: ejemplo resuelto .  | 111        |
| <b>B. El problema del tiempo y el riesgo</b>                | <b>115</b> |
| B.1. Random Walk . . . . .                                  | 115        |
| B.2. Incertidumbre y ahorro por precaución . . . . .        | 117        |

|                                       |     |
|---------------------------------------|-----|
| B.3. Modelo CAPM de consumo . . . . . | 117 |
|---------------------------------------|-----|



---

---

# CAPÍTULO 1

---

## LA ECONOMÍA DESCENTRALIZADA

### 1.1. La economía descentralizada

Este capítulo tiene como objetivo comprender las bases e implicancias de una economía descentralizada, tomando como eje central el Modelo de Equilibrio General. A diferencia de los modelos de equilibrio parcial, este enfoque permite determinar los precios de múltiples mercados de manera simultánea e interdependiente.

El análisis se estructura en tres partes. Primero, se estudian los acuerdos que generan bienestar bajo el criterio de Pareto, un estándar normativo de carácter conservador ampliamente utilizado en economía del bienestar. Luego, se examinan los supuestos necesarios para que una economía descentralizada alcance asignaciones factibles y eficientes a través del mecanismo de mercado. Finalmen-

te, las condiciones bajo las cuales los agentes toman sus decisiones conducen a la definición de los dos Teoremas Fundamentales del Bienestar, los cuales ofrecen perspectivas complementarias sobre la distribución de recursos en una economía.

### 1.1.1. Motivación del Modelo de Equilibrio General

Para motivar el estudio del equilibrio general, conviene partir desde el enfoque de equilibrio parcial y señalar sus limitaciones. El economista que consolidó el paradigma del equilibrio parcial fue **Alfred Marshall**, quien popularizó el uso de las curvas de oferta y demanda como herramienta para la determinación de precios en mercados específicos. En este enfoque, el resto de la economía se trata como constante (*ceteris paribus*), de modo que los ajustes en un mercado no afectan a los mercados relacionados.

Para ilustrar esta limitación, considérese el mercado de automóviles importados: un modelo de equilibrio parcial predice correctamente el efecto de un arancel sobre el precio y la cantidad transada en ese mercado, pero no captura los efectos secundarios sobre mercados relacionados, como el de automóviles de producción nacional, que son bienes sustitutos.

Esta interdependencia entre mercados motiva el uso del **modelo de equilibrio general**, el cual describe el ajuste simultáneo de múltiples mercados. En el ejemplo anterior, el arancel sobre autos importados encarece ese bien y desplaza parte de la demanda hacia los autos nacionales, afectando el precio y la producción en ese segundo mercado. Analizar un número arbitrario de mercados de forma simultánea es un problema de alta complejidad. Por ello, en este capítulo nos limitamos a una economía con dos mercados y adoptamos supuestos simplificadores que permiten extraer las conclusiones más relevantes sin perder generalidad en los resultados fundamentales.

**Alfred Marshall**

(1842–1924):

Economista británico  
y fundador de la  
escuela neoclásica.

Popularizó el uso de  
las curvas de oferta y  
demanda y su enfoque  
marginalista  
constituye uno de los  
pilares de la  
microeconomía  
moderna.

**Modelo de Equilibrio**

**General:** Marco  
analítico que estudia  
la determinación  
simultánea de precios  
y cantidades en dos o  
más mercados  
interrelacionados.

## 1.2. Economías Walrasianas

En esta sección introducimos las ideas de Walras sobre la determinación de precios como mecanismo eficiente de asignación de recursos.

El modelo lleva el nombre de **Léon Walras**, quien lo desarrolló en la segunda mitad del siglo XIX. En él se considera una economía con  $L$  bienes y un conjunto finito de agentes que, mediante el intercambio, buscan maximizar su utilidad. Se trata de una *economía de intercambio puro*: no hay producción ni dinero, y la riqueza de cada individuo queda determinada enteramente por su **dotación inicial**, es decir, el vector de bienes que posee antes de que ocurra cualquier intercambio.

El problema de cada individuo  $i$  consiste en elegir un vector de consumo  $x_i \in \mathbb{R}_+^L$  que maximice su utilidad, sujeto a la restricción de que el gasto no supere el valor de mercado de su dotación inicial  $\omega_i \in \mathbb{R}_+^L$ :

$$\begin{aligned} \max_{x_i \in \mathbb{R}_+^L} \quad & u_i(x_i) \\ \text{s.a.} \quad & p \cdot x_i \leq p \cdot \omega_i \end{aligned}$$

donde  $p \in \mathbb{R}_{++}^L$  es el vector de precios de los  $L$  bienes. La restricción presupuestaria indica que el gasto  $p \cdot x_i$  no puede exceder la riqueza del agente, dada por el valor de su dotación  $p \cdot \omega_i$ .

La visión de Walras es que, a partir de estas condiciones exógenas (preferencias y dotaciones), el mercado determina un vector de precios tal que las decisiones individuales de maximización son mutuamente compatibles: la oferta total de cada bien iguala a su demanda total. Este resultado se denomina **Equilibrio Walrasiano**, también conocido como equilibrio competitivo, y consiste en un vector de precios  $p^*$  y una asignación  $x^*$  tales que: (i) cada individuo maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria, y (ii) la demanda agregada de cada bien es igual a su dotación agregada

**Léon Walras**  
(1834–1910):  
Economista francés perteneciente a la escuela de Lausana. Considerado uno de los fundadores de la economía matemática y del análisis de equilibrio general.

**Equilibrio Walrasiano (o competitivo):** Par  $(p^*, x^*)$  tal que (i) cada agente maximiza su utilidad sujeto a su restricción presupuestaria, y (ii) los mercados se vacían, es decir, la demanda agregada iguala a la dotación agregada en cada bien.

en la economía.

El mecanismo de ajuste de precios es intuitivo: si la demanda de un bien excede su oferta, el precio sube hasta eliminar el exceso de demanda; si hay un exceso de oferta, el precio baja hasta que la demanda absorba la oferta disponible. Este proceso continúa hasta que todos los mercados se vacían simultáneamente.

### 1.2.1. Ley de Walras

Decimos que un mercado se *vacía* cuando su exceso de demanda es igual a cero, es decir, cuando toda la oferta encuentra su demanda correspondiente. Formalmente, definimos el **exceso de demanda** del agente  $i$  para el vector de precios  $p$  como:

**Exceso de demanda:**  
Diferencia entre la  
cantidad demandada  
y la dotación  
disponible de un bien  
para un agente dado.

$$z_i(p) = x_i(p, p \cdot \omega_i) - \omega_i \quad (1.1)$$

Este vector recoge, para cada bien, cuánto desea consumir el agente por encima de lo que ya posee. El exceso de demanda *agregado* del mercado del bien  $n$  es la suma sobre todos los agentes:

$$z_n(p) = \sum_{i=1}^I (x_{in}(p, p \cdot \omega_i) - \omega_{in}) \quad (1.2)$$

El mercado del bien  $n$  está en equilibrio cuando  $z_n(p^*) = 0$ . Para un vector de precios arbitrario  $p \neq p^*$ , puede ocurrir que  $z_n(p) > 0$  (exceso de demanda) o  $z_n(p) < 0$  (exceso de oferta).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Un exceso de demanda negativo es equivalente a un exceso de oferta.

**Teorema 1.2.1. Ley de Walras**

Para cualquier vector de precios  $p \in \mathbb{R}_{++}^L$ , el valor agregado del exceso de demanda en todos los mercados es igual a cero:

$$p \cdot Z(p) = \sum_{n=1}^L p_n \cdot z_n(p) = 0 \quad (1.3)$$

Este resultado se deduce directamente de las restricciones presupuestarias individuales: dado que cada agente gasta exactamente su riqueza ( $p \cdot x_i = p \cdot \omega_i$ , bajo no saciedad local), al agregar sobre todos los agentes y todos los bienes se obtiene que el valor total del exceso de demanda es nulo. Nótese que la Ley de Walras es una identidad que se cumple para *cualquier* vector de precios, no solo para el de equilibrio.

Una implicancia inmediata es la siguiente:

**Corolario 1.2.1.1. Resultados de la Ley de Walras**

- Si  $L - 1$  mercados están en equilibrio (es decir,  $z_n(p) = 0$  para  $n = 1, \dots, L - 1$ ), entonces el mercado restante también estará en equilibrio.
- Si el exceso de demanda en un mercado es positivo, entonces el valor del exceso de demanda en los demás mercados debe ser negativo para que la suma ponderada sea cero.

El primer corolario justifica que podamos limitar el análisis a dos mercados: basta con verificar el equilibrio en uno de ellos para garantizar el equilibrio en el otro.

Por último, los supuestos del modelo son:

1. **Competencia perfecta.** Todos los agentes son tomadores de precios, es decir, ninguno tiene poder para influir sobre los precios de mercado.
2. **Información completa.** Cada individuo conoce todos los bienes disponibles en la economía, así como sus propias preferencias.
3. **Racionalidad.** Los agentes maximizan su utilidad de manera consistente con sus preferencias y restricciones.
4. **Ausencia de externalidades.** El consumo de un bien por parte de un agente no afecta directamente la utilidad de ningún otro agente.<sup>2</sup>

A continuación describiremos el modelo con mayor detalle bajo el supuesto de dos agentes y dos bienes, lo que permitirá representarlo gráficamente mediante la **caja de Edgeworth**.

---

<sup>2</sup>Este supuesto puede levantarse bajo ciertas condiciones y aun así obtenerse un equilibrio eficiente; sin embargo, en este texto asumiremos que no existen externalidades.

## 1.3. Caja de Edgeworth

La **Caja de Edgeworth** es la representación gráfica del modelo de intercambio walrasiano con dos agentes. El concepto fue introducido por **Francis Edgeworth** y el diagrama tal como se usa actualmente fue desarrollado por **Arthur Bowley**, economista y estadístico británico. Las dimensiones de la caja están determinadas por las dotaciones totales de cada bien, y dentro de ella es posible representar las curvas de indiferencia de los agentes, la dotación inicial y otros conceptos que se irán introduciendo a lo largo del capítulo.

La economía considera dos individuos  $i \in \{A, B\}$  que intercambian dos bienes  $j \in \{x, y\}$ . La dotación de cada individuo es un vector de  $\mathbb{R}_+^2$ :

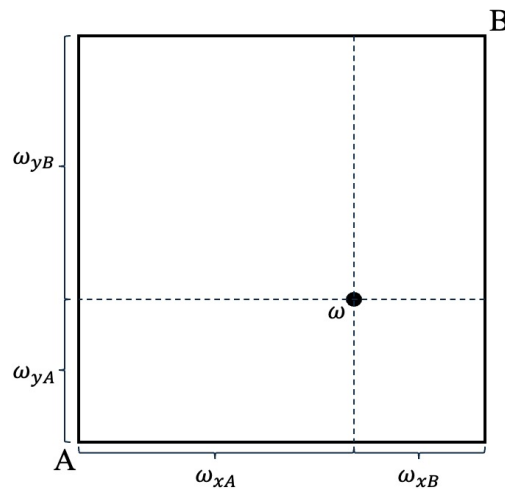
$$\omega_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy}) \in \mathbb{R}_+^2$$

Como se observa en la figura 1.1, las dimensiones de la caja corresponden a las dotaciones totales de cada bien:  $\omega_x = \omega_{Ax} + \omega_{Bx}$  en el eje horizontal y  $\omega_y = \omega_{Ay} + \omega_{By}$  en el eje vertical. La dotación inicial de la economía se representa como un punto  $\omega = (\omega_x, \omega_y)$  en el interior de la caja.

**Caja de Edgeworth:** Herramienta gráfica para representar una economía de intercambio puro con dos agentes y dos bienes.

**Francis Edgeworth** (1845–1926): Economista y estadístico irlandés-británico. En su obra *Mathematical Psychics* (1881) introduce el concepto de curva de contrato y sienta las bases del análisis de intercambio bilateral.

Figura 1.1: Dimensiones de la caja de Edgeworth

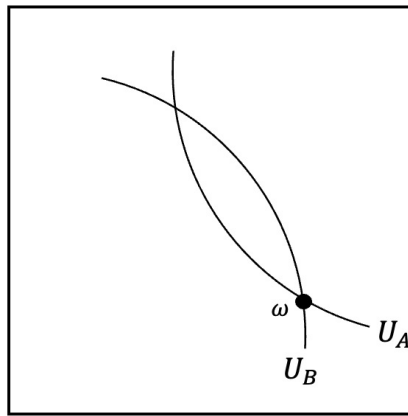


**Arthur Bowley** (1869–1957): Economista y estadístico británico, pionero en el uso de técnicas de muestreo en encuestas sociales y en la formalización gráfica del intercambio bilateral.

Las curvas de indiferencia de ambos agentes pueden representar-

se simultáneamente dentro de la caja. Un aspecto clave a tener en cuenta es la orientación de los ejes de cada agente: el origen del agente  $A$  se ubica en la esquina inferior izquierda, por lo que sus curvas de indiferencia de mayor utilidad se desplazan hacia la esquina superior derecha. El agente  $B$ , en cambio, tiene su origen en la esquina superior derecha, de modo que sus curvas de mayor utilidad se desplazan hacia la esquina inferior izquierda. En otras palabras, para cada agente las curvas de mayor utilidad son aquellas más alejadas de su propio origen.

Figura 1.2: Curvas de indiferencia y dotación inicial



Dada la dotación inicial, cada agente alcanza un nivel de utilidad determinado, representado por las curvas de indiferencia que pasan por el punto  $\omega$ . En lo que sigue se formalizará el proceso mediante el cual los agentes intercambian bienes con el objetivo de alcanzar niveles de utilidad más altos.

## 1.4. Economía de intercambio bajo el criterio de Pareto

Un aspecto fundamental de este modelo es el criterio de Pareto aplicado a los intercambios. Dado que un intercambio voluntario solo ocurre cuando ambas partes lo aceptan, la asignación resultante debe dominar paretianamente a la dotación inicial.<sup>3</sup>

Dadas las preferencias y dotaciones, los individuos intercambian bienes para maximizar su utilidad. Este proceso se analiza bajo el criterio de **Vilfredo Pareto**, según el cual una **mejoría de Pareto** es toda reasignación que mejore la situación de al menos un individuo sin perjudicar a ningún otro. El proceso de intercambio continúa mientras existan mejoras de Pareto disponibles y se detiene cuando estas se agotan: ese punto se denomina **óptimo de Pareto**.

El conjunto de asignaciones que constituyen una mejoría de Pareto respecto a la dotación inicial se representa gráficamente mediante el *lente de mejoras de Pareto*, correspondiente al área sombreada en la figura 1.3. Toda asignación dentro del lente mejora a ambos agentes simultáneamente respecto a su situación inicial.<sup>4</sup>

Los agentes intercambian bienes mientras sus **tasas marginales de sustitución** sean distintas. Que las TMS difieran significa que los agentes valoran los bienes de manera distinta, lo que hace posible un intercambio mutuamente beneficioso: si A valora relativamente más el bien y que B, puede ceder unidades de x a cambio de unidades de y, mejorando ambos. Este proceso se agota cuando las tasas

**Vilfredo Pareto**  
(1848–1923):

Economista e ingeniero italiano. Trabajando sobre el equilibrio walrasiano, introdujo el concepto de óptimo que lleva su nombre como criterio normativo de eficiencia en la asignación de recursos.

**Mejoría de Pareto:**  
Reasignación de recursos que mejora el bienestar de al menos un individuo sin reducir el de ningún otro.

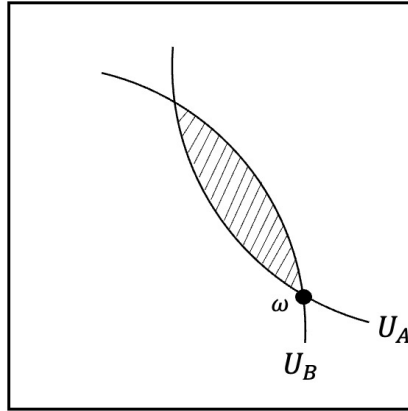
**Óptimo de Pareto:**  
Asignación en la que no existe ninguna reasignación factible que constituya una mejoría de Pareto.

**Tasa Marginal de Sustitución (TMS):**  
Cantidad del bien y a la que un agente está dispuesto a renunciar por una unidad adicional del bien x, manteniendo constante su nivel de utilidad. Se calcula como  $TMS_{x,y}^i = \frac{\partial u_i / \partial x_i}{\partial u_i / \partial y_i}$ .

<sup>3</sup>Se asumen válidos todos los supuestos del modelo walrasiano mencionados anteriormente.

<sup>4</sup>Cabe precisar que un óptimo de Pareto no es sinónimo de equilibrio walrasiano: el primero es una condición de eficiencia que indica que no existen intercambios mutuamente beneficiosos posibles, mientras que el segundo requiere adicionalmente que los mercados se vacíen a un vector de precios competitivo. Por otra parte, la eficiencia paretiana no implica equidad: una asignación en que un agente concentra la totalidad de los recursos es óptima de Pareto, pero puede ser considerada indeseable bajo otros criterios normativos.

Figura 1.3: Lente de mejoras de Pareto

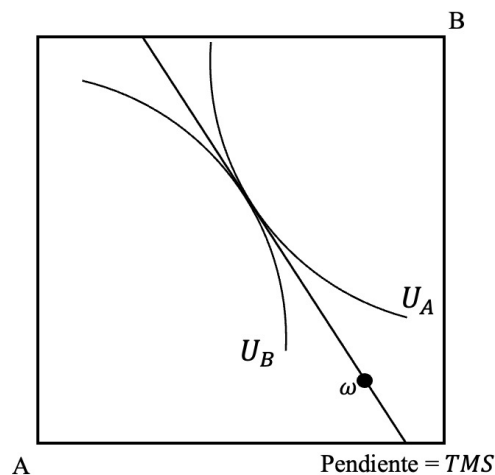


marginales de sustitución se igualan:

$$TMS_{x,y}^A = TMS_{x,y}^B \quad (1.4)$$

En ese punto ningún intercambio adicional es mutuamente beneficioso. Gráficamente, la condición (1.4) corresponde a la tangencia de las curvas de indiferencia de ambos agentes.

Figura 1.4: Óptimo de Pareto y tangencia de curvas de indiferencia



Expresando la TMS en términos de las utilidades marginales, la

## 1.4. ECONOMÍA DE INTERCAMBIO BAJO EL CRITERIO DE PARETO 19

condición (1.4) se escribe como:

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}{\frac{\partial u_A}{\partial y_A}} = \frac{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}}$$

La colección de todas las asignaciones que satisfacen esta condición dentro de la caja de Edgeworth se denomina **curva de contrato**. Su forma depende de las funciones de utilidad de los individuos.

**Curva de contrato:**  
Lugar geométrico de los óptimos de Pareto dentro de la caja de Edgeworth.  
Corresponde al conjunto de puntos donde las curvas de indiferencia de ambos agentes son tangentes.

### Ejemplo: preferencias Cobb-Douglas idénticas

Para ilustrar la derivación de la curva de contrato, supongamos que ambos agentes tienen preferencias Cobb-Douglas con los mismos parámetros  $\alpha, \beta > 0$ :

$$u_A(x_A, y_A) = x_A^\alpha y_A^\beta$$

$$u_B(x_B, y_B) = x_B^\alpha y_B^\beta$$

Nótese que asumir parámetros idénticos para ambos agentes es un caso particular; en general, cada agente podría tener distintos parámetros.

Las tasas marginales de sustitución son:

$$TMS_{x,y}^A = \frac{\alpha x_A^{\alpha-1} y_A^\beta}{\beta x_A^\alpha y_A^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_A}{x_A}$$

$$TMS_{x,y}^B = \frac{\alpha x_B^{\alpha-1} y_B^\beta}{\beta x_B^\alpha y_B^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_B}{x_B}$$

Igualando:

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_A}{x_A} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{y_B}{x_B} \implies \frac{y_A}{x_A} = \frac{y_B}{x_B}$$

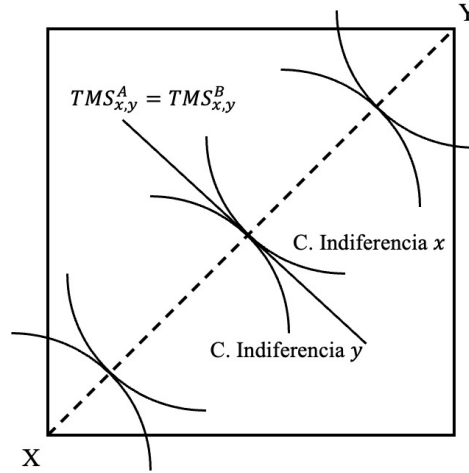
Usando las condiciones de factibilidad  $x_B = \omega_x - x_A$  e  $y_B = \omega_y - y_A$ :

$$\begin{aligned}\frac{y_A}{x_A} &= \frac{\omega_y - y_A}{\omega_x - x_A} \\ y_A(\omega_x - x_A) &= x_A(\omega_y - y_A) \\ y_A \omega_x &= x_A \omega_y\end{aligned}$$

Lo que nos entrega la curva de contrato:

$$y_A = \frac{\omega_y}{\omega_x} \cdot x_A \quad (1.5)$$

Figura 1.5: Curva de contrato



La expresión (1.5) describe una relación lineal que pasa por el origen de ambos agentes, es decir, la diagonal de la caja de Edgeworth. Este resultado es específico al caso en que ambos agentes tienen las mismas preferencias Cobb-Douglas: cuando los parámetros difieren, la curva de contrato adopta una forma no lineal. Toda asignación sobre esta curva es un óptimo de Pareto: no es posible mejorar el bienestar de un agente sin reducir el del otro.

## 1.5. Eficiencia de los mercados

Habiendo estudiado las condiciones de eficiencia paretiana en términos de asignaciones, retomamos ahora el análisis de precios. En esta sección se estudia cómo el mecanismo de mercado determina precios que vacían simultáneamente todos los mercados, y cómo esos precios dependen de las dotaciones y preferencias de los agentes.

### 1.5.1. Riqueza en una economía de intercambio

En una economía de intercambio puro, la riqueza de cada agente no proviene de un ingreso monetario sino del valor de mercado de su dotación inicial. Para el individuo  $i$ , su riqueza es:

$$R_i = p_x \cdot \omega_{ix} + p_y \cdot \omega_{iy} \quad (1.6)$$

Esta expresión es análoga a la restricción presupuestaria de un problema estándar de maximización de utilidad. Bajo el supuesto de no saciedad local, el agente gasta exactamente toda su riqueza, por lo que la restricción presupuestaria se satisface con igualdad. El problema de maximización del individuo  $i$  con preferencias Cobb-Douglas es:

$$\begin{aligned} \max_{x_i, y_i} \quad & u_i(x_i, y_i) = x_i^\alpha y_i^\beta \\ \text{s.a.} \quad & p_x \cdot x_i + p_y \cdot y_i = R_i \end{aligned}$$

Resolviendo este problema se obtienen las **demandas marshallianas** para cada bien.

### 1.5.2. Demandas Marshallianas

Para derivar las demandas marshallianas asumiremos preferencias Cobb-Douglas con  $\alpha, \beta > 0$  y  $\alpha + \beta = 1$ . Este último supuesto (ren-

**Demandas Marshallianas:**  
Demandas óptimas que resultan de maximizar la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria. Dependen de los precios y de la riqueza del agente.

dimientos constantes a escala) simplifica la expresión de las demandas: para una Cobb-Douglas general  $x^\alpha y^\beta$ , las demandas son  $x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \frac{R}{p_x}$  e  $y^* = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \frac{R}{p_y}$ , que bajo  $\alpha + \beta = 1$  se reducen a:

$$\begin{aligned} x_A^* &= \frac{\alpha R_A}{p_x}, & y_A^* &= \frac{\beta R_A}{p_y} \\ x_B^* &= \frac{\alpha R_B}{p_x}, & y_B^* &= \frac{\beta R_B}{p_y} \end{aligned}$$

La derivación completa de este resultado puede revisarse en el anexo A.1. Como es esperable en cualquier demanda marshalliana, un aumento en la riqueza incrementa la cantidad demandada, mientras que un aumento en el precio propio la contrae.

### 1.5.3. Precios relativos

Los precios de equilibrio quedan determinados por las dotaciones y las preferencias de los agentes, y son tales que todos los mercados se vacían simultáneamente. Un resultado fundamental es que en este modelo solo importan los *precios relativos* y no los precios nominales: un mismo equilibrio se sostiene bajo los vectores  $p = (1, 2)$  y  $p = (2, 4)$ , ya que la relación entre precios se mantiene en ambos casos.

Por este motivo es frecuente normalizar uno de los precios tomándolo como **numerario**. Si tomamos  $p_x$  como numerario, multiplicamos el vector de precios por  $\frac{1}{p_x}$ , obteniendo  $p = \left(1, \frac{p_y}{p_x}\right)$ . Esto simplifica el álgebra sin pérdida de generalidad.<sup>5</sup>

Para encontrar los precios de equilibrio aplicamos las condiciones de vaciamiento de mercado:

$$x_A^* + x_B^* = \omega_x, \quad y_A^* + y_B^* = \omega_y$$

<sup>5</sup>La normalización de precios no solo simplifica el cálculo, sino que también se utiliza en demostraciones como la de la Ley de Walras.

## 1.6. TEOREMAS FUNDAMENTALES DE LA ECONOMÍA DEL BIENESTAR 23

Sustituyendo las demandas marshallianas en la condición para el bien  $x$ :

$$\frac{\alpha R_A}{p_x} + \frac{\alpha R_B}{p_x} = \omega_x$$
$$\frac{\alpha}{p_x}(R_A + R_B) = \omega_x$$

Definiendo  $R = R_A + R_B$  como la riqueza total de la economía y despejando:

$$p_x = \frac{\alpha R}{\omega_x}, \quad p_y = \frac{\beta R}{\omega_y}$$

Estas expresiones muestran que los precios nominales dependen de la riqueza total  $R$ , la cual a su vez depende de los propios precios, por lo que los precios nominales no son informativos por sí solos. Para resolverlo, tomamos el precio relativo  $p_y/p_x$ , con lo que la riqueza total se cancela:

$$\frac{p_y}{p_x} = \frac{\frac{\beta R}{\omega_y}}{\frac{\alpha R}{\omega_x}} = \frac{\beta \omega_x}{\alpha \omega_y} \quad (1.7)$$

El precio relativo de equilibrio depende únicamente de las preferencias  $(\alpha, \beta)$  y de las dotaciones totales  $(\omega_x, \omega_y)$ : a mayor abundancia relativa de un bien, menor su precio relativo.

## 1.6. Teoremas fundamentales de la economía del bienestar

Hasta ahora hemos estudiado dos elementos por separado: el criterio de Pareto para evaluar asignaciones, y el mecanismo de mercado para la determinación de precios de equilibrio. Los teoremas fundamentales del bienestar vinculan ambos elementos, estableciendo

una relación precisa entre los equilibrios walrasianos y los óptimos de Pareto.

#### PRIMER TEOREMA DEL BIENESTAR

**Todo equilibrio walrasiano es un óptimo de Pareto.** Este teorema establece que las asignaciones alcanzadas mediante mercados competitivos son eficientes en el sentido de Pareto. Se relaciona con la noción de la *mano invisible* de Adam Smith: los individuos, al perseguir su propio beneficio sujetos a precios de mercado, llegan a un resultado que es eficiente para la economía en su conjunto. El teorema se cumple bajo los supuestos del modelo walrasiano (competencia perfecta, información completa, ausencia de externalidades y racionalidad).

#### SEGUNDO TEOREMA DEL BIENESTAR

**Todo óptimo de Pareto puede sostenerse como un equilibrio walrasiano para alguna redistribución de las dotaciones iniciales.** Este teorema requiere, además de los supuestos walrasianos, que las preferencias de los agentes sean *convexas*. Su implicancia es que la eficiencia del mercado y los objetivos distributivos son en principio separables: un planificador puede elegir la distribución deseable de recursos y luego dejar que el mercado opere libremente para alcanzar la asignación eficiente correspondiente. Esto se relaciona con las ideas redistributivas del Estado de bienestar sin renunciar a la eficiencia del mercado.

Nótese que ambos teoremas son lógicamente independientes entre sí: que uno se cumpla no implica ni requiere que el otro se cumpla. La diferencia fundamental es que el segundo teorema exige el supuesto adicional de convexidad de preferencias, que no es necesario para el primero.

Las demostraciones de ambos teoremas se encuentran en el anexo.

### 1.6.1. Eficiencia e igualdad

El segundo teorema sugiere que no existe necesariamente un conflicto entre eficiencia e igualdad: para cualquier óptimo de Pareto que se considere socialmente deseable, existe una redistribución de dotaciones que permite alcanzarlo mediante el mercado. Sin embargo, esta conclusión depende de un supuesto implícito crítico: que la redistribución de dotaciones iniciales no distorsione los precios relativos de equilibrio. En otras palabras, se asume que las políticas redistributivas son neutrales respecto a los precios.

Esta neutralidad no se cumple para la mayoría de los instrumentos de política disponibles. Fijar precios administrativamente (salvo que coincidan con los de equilibrio), gravar el consumo o la producción, o subsidiar bienes específicos distorsionan los precios relativos y generan una pérdida irrecuperable de eficiencia. El único instrumento que no produce esta distorsión es el **impuesto de suma alzada**.

Un impuesto de suma alzada es una cantidad fija que el agente debe pagar independientemente de sus decisiones económicas. Al no depender del consumo ni de la producción de ningún bien, no altera los precios relativos ni los incentivos de los individuos y, por tanto, no genera ineficiencia. Sin embargo, en la práctica es ampliamente criticado por ser regresivo: al ser un monto fijo, representa una carga proporcionalmente mayor para los agentes de menor riqueza.

Cualquier otro instrumento redistributivo —impuestos a la renta, al consumo o a la producción— introduce alguna distorsión en los precios relativos y, con ello, una pérdida de eficiencia. En esos casos sí existe un conflicto entre igualdad y eficiencia.

Volviendo al modelo de intercambio, para que un planificador central consiga redistribuir recursos hacia una asignación Pareto-óptima específica sin generar distorsiones, debe enfrentar dos dificultades prácticas. Primero, si redistribuye mediante transferencias de renta, el monto transferido debe ser exactamente igual al valor de mer-

***Impuesto de suma alzada:** Impuesto de monto fijo que no depende de la producción, el consumo ni el ingreso del agente, por lo que no altera los precios relativos ni los incentivos de los individuos.*

cado de la asignación deseada, lo que exige conocer de antemano los precios de equilibrio y las asignaciones individuales. Segundo, si redistribuye directamente las dotaciones físicas, los agentes podrían ocultar su riqueza ante la ausencia de información perfecta, haciendo inviable la redistribución.

En síntesis, el segundo teorema del bienestar abre la puerta teórica a separar eficiencia y distribución, pero su aplicación práctica depende de supuestos informativos e instrumentales que difícilmente se cumplen en economías reales.

## 1.7. Producción en equilibrio general

Una extensión natural del modelo de equilibrio general con dos bienes y dos agentes consiste en incorporar explícitamente la producción. En lugar de suponer que los bienes son dotados exógenamente, ahora los agentes están dotados de *factores de producción*: capital  $K$  y trabajo  $L$ . A partir de estos factores se producen los bienes  $x$  e  $y$  que los individuos consumen. La economía dispone de una dotación total de capital  $\bar{K}$  y una dotación total de trabajo  $\bar{L}$ .

### 1.7.1. Curva de contrato de la producción y frontera de posibilidades de producción

Análogamente al caso del consumo, la condición de eficiencia en la producción requiere igualar las tasas marginales de sustitución entre factores. En el contexto de la producción, esta tasa se denomina **tasa marginal técnica de sustitución (TMST)**, y se define como:

**Tasa Marginal Técnica de Sustitución (TMST):**  
Razón a la que pueden sustituirse capital por trabajo dentro de un proceso productivo, manteniendo constante el nivel de producción. Equivale al cociente de los productos marginales

$$TMST = \frac{\frac{\partial f(K, L)}{\partial K}}{\frac{\partial f(K, L)}{\partial L}} \quad (1.8)$$

Dado que capital y trabajo deben repartirse entre la producción de  $x$  e  $y$ , la condición de eficiencia productiva exige que ambas industrias igualen sus tasas marginales técnicas de sustitución:

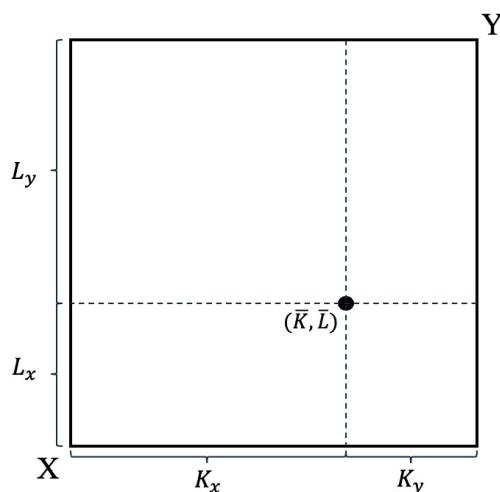
$$TMST_{K,L}^x = TMST_{K,L}^y \quad (1.9)$$

Esta condición es el análogo productivo de la igualdad de tasas marginales de sustitución en el consumo: indica que los factores están asignados de manera tal que no es posible reasignar capital o trabajo entre industrias para aumentar la producción de un bien sin reducir la del otro.

Podemos representar esta situación mediante una caja de Edgeworth de la producción, cuyas dimensiones son  $\bar{K}$  y  $\bar{L}$  (Figura 1.6). Las curvas análogas a las curvas de indiferencia en este contexto son las **isocuantas**, que recogen todas las combinaciones de factores que generan un mismo nivel de producción.

**Isocuantas:** Curvas que representan todas las combinaciones de capital y trabajo que producen una misma cantidad de un bien.

Figura 1.6: Caja de Edgeworth de la producción

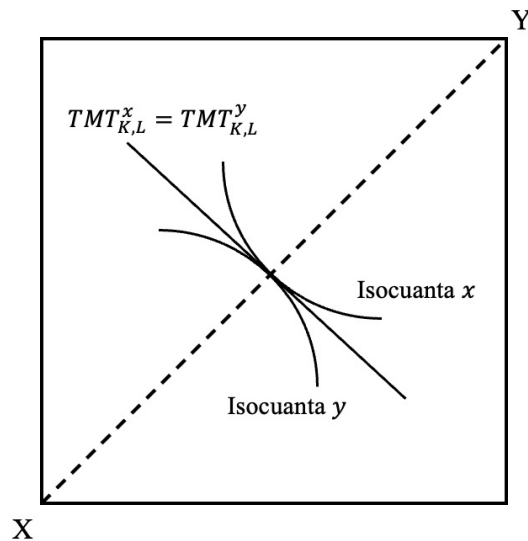


La **curva de contrato de la producción** es el lugar geométrico de puntos que satisfacen la condición (1.9): la colección de asignaciones de factores Pareto-eficientes en la producción. Existe una correspondencia directa entre esta curva y la **frontera de posibilidades de producción (FPP)**, ya que cada punto eficiente en la caja

**Frontera de posibilidades de producción (FPP):** Conjunto de combinaciones máximas de producción de los bienes  $x$  e  $y$  que son factibles dada la dotación total de factores y las tecnologías disponibles.

de producción se traduce en un punto sobre la FPP, y viceversa. Por tanto, producir sobre la FPP equivale a estar en la curva de contrato de la producción.

Figura 1.7: Curva de contrato de la producción



La FPP recoge los puntos tales que aumentar la producción de un bien requiere necesariamente reducir la del otro, lo que refleja el uso eficiente de la dotación total de factores. Un punto interior a la FPP es ineficiente: sería posible producir más de ambos bienes reasignando los factores, como se ilustra en la figura 1.8.

La pendiente de la FPP en cada punto mide la **tasa de transformación** (TRT), es decir, cuántas unidades del bien y deben sacrificarse para producir una unidad adicional del bien x:

$$TRT = -\frac{dy}{dx}\bigg|_{FPP}$$

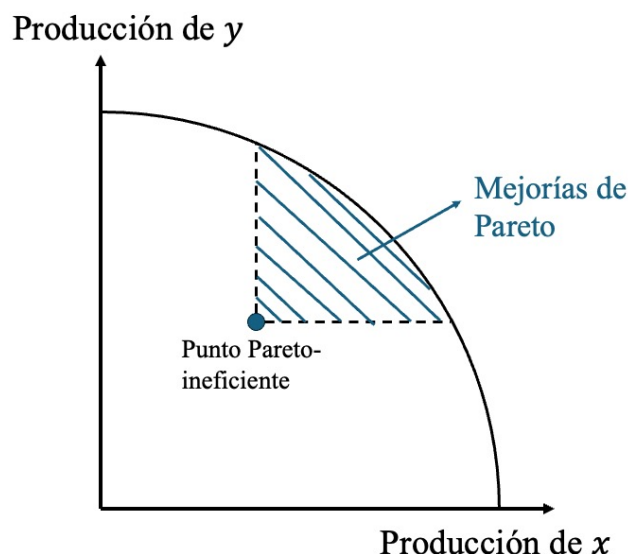
En el punto de la FPP que corresponde a un punto de la curva de contrato, la TRT es igual al cociente de los precios de los factores, dado que la TMST de ambas industrias se iguala a ese cociente en el equilibrio competitivo.

#### **Tasa de Transformación**

**(TRT):** Pendiente (en valor absoluto) de la FPP. Indica cuántas unidades del bien y deben sacrificarse para producir una unidad adicional del bien x.

Conceptualmente distinta de la TMST, que opera entre factores dentro de una misma función de producción.

Figura 1.8: Frontera de posibilidades de producción



### 1.7.2. El equilibrio bajo producción

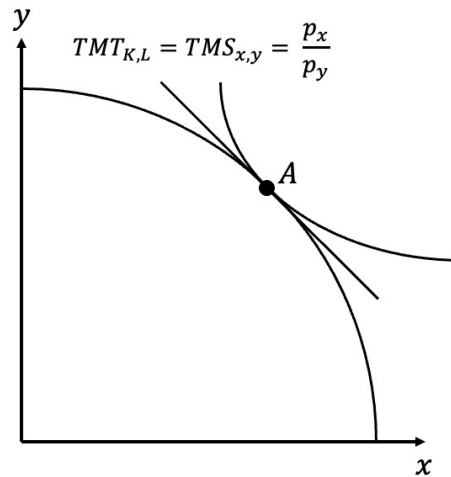
Equilibrio y eficiencia no son la misma cosa. A continuación se estudia cómo emerge el equilibrio en esta economía y bajo qué condiciones se alcanzan simultáneamente la eficiencia productiva y la eficiencia en la asignación del consumo.

Para determinar los precios de los bienes, combinamos la FPP con la demanda de los consumidores. Con este fin construimos una función de utilidad agregada, cuyas curvas de indiferencia representan las preferencias colectivas de la economía sobre los bienes  $x$  e  $y$ . El equilibrio se alcanza en la tangencia entre la FPP y una curva de indiferencia agregada (figura 1.9), es decir, donde la tasa de transformación iguala la tasa marginal de sustitución:

$$TRT = TMS \quad (1.10)$$

La tangencia en la condición (1.10) determina los precios relativos

Figura 1.9: Precios relativos de los bienes y frontera de posibilidades de producción



de los bienes  $x$  e  $y$ .<sup>6</sup> Para formalizar este resultado, es necesaria la siguiente condición:

### Ley del precio único

En ausencia de fricciones al comercio y bajo competencia perfecta con precios flexibles, bienes idénticos deben transarse al mismo precio (expresado en la misma moneda) en todos los mercados.

Bajo la ley del precio único y la competencia perfecta en los mercados de factores y bienes, el equilibrio general satisface simultáneamente tres condiciones de eficiencia:

<sup>6</sup>Por el teorema de separación de conjuntos convexos, el hiperplano que separa la FPP del conjunto de preferencias en ese punto de tangencia corresponde al vector de precios de equilibrio.

### Eficiencia en la producción

Para que la producción sea eficiente, la condición (1.9) debe cumplirse en el equilibrio. Bajo la ley del precio único, ambas industrias enfrentan los mismos precios de los factores: un salario  $w$  para el trabajo y una renta  $r$  para el capital. Dado que los productores competitivos maximizan beneficios tomando los precios como dados, igualan la TMST al cociente de precios de los factores:

$$TMST_{K,L}^x = \frac{w}{r} = TMST_{K,L}^y \quad (1.11)$$

Esto garantiza que ambas industrias se ubiquen en la curva de contrato de la producción, es decir, sobre la FPP.

### Eficiencia en la asignación del consumo

En el punto de tangencia de la figura 1.9, la pendiente de la curva de indiferencia agregada es igual a los precios relativos de los bienes  $p_x/p_y$ . Dado que en el equilibrio walrasiano cada consumidor iguala su TMS a los mismos precios relativos (ley del precio único), se cumple que:

$$TMS_{x,y}^A = \frac{p_x}{p_y} = TMS_{x,y}^B$$

lo que garantiza la eficiencia en la asignación del consumo, es decir, la condición (1.4).

### Eficiencia entre producción y consumo

En el punto de equilibrio sobre la FPP, la TRT es igual a la pendiente de la FPP. Por la eficiencia productiva (1.11) y la condición de precios relativos competitivos:

$$TRT = -\frac{dy}{dx}\bigg|_{FPP} = \frac{p_x}{p_y}$$

Combinando con la condición de eficiencia en el consumo, obtenemos la condición global de equilibrio:

$$TMS_{x,y}^A = TMS_{x,y}^B = \frac{p_x}{p_y} = TRT$$

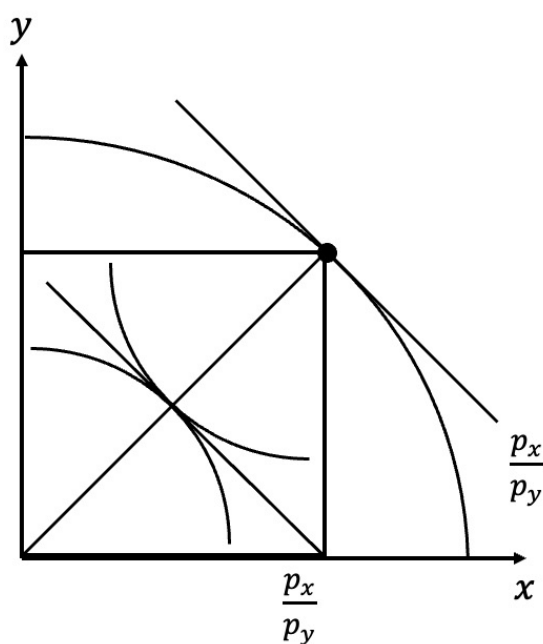
Esta cadena de igualdades asegura que la producción sea exactamente la que demandan los consumidores: si el bien  $y$  fuera relativamente más caro, los productores tendrían incentivos a reasignar factores hacia su producción, ajustando simultáneamente los precios relativos de los factores  $w/r$ .

### 1.7.3. Una representación gráfica del equilibrio general con producción

Dado que en el equilibrio se cumple  $TMS = TRT$ , el punto de tangencia entre la FPP y la curva de indiferencia agregada determina la producción total de cada bien. Estas cantidades actúan como las dimensiones de la caja de Edgeworth del consumo, dentro de la cual los agentes alcanzan un óptimo de Pareto. El equilibrio general puede representarse gráficamente superponiendo ambas herramientas, como se muestra en la figura 1.10.

La resolución algebraica del modelo se encuentra en el anexo.

Figura 1.10: Equilibrio general con producción



## Palabras Clave

1. Equilibrio competitivo 2. Equilibrio general 3. Ley de Walras  
4. Precios relativos 5. Eficiencia de Pareto 6. Mejorías de Pareto  
7. Curva de contrato 8. Primer teorema del bienestar 9. Segundo teorema del bienestar 10. Frontera de posibilidades 11. Ley del Precio único

## Ejercicios

### Curvas de indiferencia y curvas de contrato

Considere una economía simple de intercambio compuesta por dos agentes (Amanda y Benito) y dos bienes (empanadas y vino tinto). Amanda tiene muchas empanadas y poco vino, mientras que Benito tiene mucho vino y pocas empanadas. Ambos prefieren, de alguna manera, combinar ambos bienes en su consumo. Suponga inicialmente que Amanda y Benito tienen preferencias Cobb-Douglas. En términos relativos, Amanda tiende a valorar más el vino en sus canastas, mientras que Benito prefiere canastas con más empanadas.

- a. Construya y explique la caja de Edgeworth, la curva de contrato, el conjunto de oportunidades de comercio y el núcleo de la economía.
- b. Explique la diferencia entre mejoría de Pareto y óptimo de Pareto en el gráfico del numeral anterior.
- c. Explique cómo se construyen las curvas de oferta y demanda y el rol que juegan en ello los efectos sustitución e ingreso.
- d. Explique cómo se representa el primer teorema del bienestar en la caja de Edgeworth, e identifique dónde se observan los flujos de comercio y los precios del equilibrio walrasiano.
- e. ¿Cómo cambia la curva de contrato si las preferencias de Amanda son de tipo Leontief y las de Benito son Cobb-Douglas?
- f. ¿Cómo cambia la curva de contrato si tanto Amanda como Benito tienen preferencias Leontief?
- g. ¿Cómo cambia la curva de contrato si las preferencias de Amanda son Leontief y las de Benito son de sustitución perfecta?

- h. ¿Cómo cambia la curva de contrato si tanto Amanda como Benito tienen preferencias de sustitución perfecta?

## Equilibrio y ajustes de mercado

Considere una economía  $2 \times 2$  en que  $u_1(x, y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$  y  $u_2(x, y) = \beta x^\alpha y^{1-\alpha}$ , donde  $\alpha \in (0, 1)$  y  $\beta > 1$  son constantes dadas. Nótese que  $u_2$  es una transformación monótona de  $u_1$ , por lo que ambos agentes tienen preferencias idénticas. Las dotaciones iniciales son  $\omega_1 = (\theta, \delta)$  y  $\omega_2 = (\delta, \theta)$ .

- Dibuje la caja de Edgeworth. Identifique el área de mejoras de Pareto, los óptimos de Pareto, el núcleo de la economía y las dotaciones iniciales.
- Obtenga el equilibrio walrasiano.
- Explique el primer teorema del bienestar y verifique si se cumple.
- Suponga que se reparte una unidad adicional del bien  $x$ : la fracción  $\rho \in [0, 1]$  se entrega al individuo 1 y el resto al individuo 2. Encuentre el precio de equilibrio de esta economía.
- Suponga que  $\theta = 1$  y  $\delta = 0$ . Obtenga las cantidades de equilibrio.
- ¿Se cumple el primer teorema del bienestar? Justifique.

## Equilibrio general en la Taberna de Moe

Considere la ciudad de Springfield como una economía  $2 \times 2$ , con dos individuos: Homero Simpson (denotado  $H$ ) y Lenny Leonard

(denotado  $L$ ), que consumen dos bienes: rosquillas ( $r$ ) y cervezas ( $c$ ). Sus funciones de utilidad son:

$$U_H = r_H^\alpha c_H^{1-\alpha}$$

$$U_L = (r_L^\alpha c_L^{1-\alpha})^2$$

con  $\alpha \in (0, 1)$ . Las dotaciones iniciales son:

$$\omega_H = (10, 4), \quad \omega_L = (5, 8)$$

- Obtenga una expresión general para las curvas de indiferencia de cada individuo y grafique la caja de Edgeworth, indicando las dotaciones iniciales y el núcleo de la economía. ¿Qué ocurre en el núcleo? *Hint*: grafique  $c$  en el eje vertical y  $r$  en el eje horizontal.
- Explique qué representa la curva de contrato. Luego, encuentrela e indique si la dotación inicial es un óptimo de Pareto.
- Plantee el problema de optimización de Homero y el de Lenny. Asuma de ahora en adelante que  $p_r = 1$  (el bien  $r$  es el numeraire).
- Encuentre las demandas marshallianas de Homero y de Lenny para cada bien.
- Encuentre el equilibrio walrasiano de la economía de Springfield: obtenga el precio de equilibrio y las cantidades de equilibrio de cada individuo.
- Verifique que el equilibrio walrasiano sea un óptimo de Pareto. ¿A qué teorema del bienestar corresponde esto?
- Si las dotaciones iniciales hubieran sido idénticas para ambos individuos, ¿habría intercambio de bienes? Justifique.
- Para esta pregunta asuma  $\alpha = 0,3$  y calcule las demandas obtenidas en el ítem (d). ¿Quién consume más rosquillas? ¿Quién consume más cervezas?

- i. Homero, fanático de las rosquillas y las cervezas, considera que no es justo que Lenny consuma más de ambos bienes, por lo que recurre al alcalde Diamante —amenazando con revelar lo de las elecciones— para que intervenga la economía y reduzca la desigualdad. El asesor del alcalde, el profesor Frink, advierte que lograrlo tendrá un costo en términos de eficiencia. ¿Tiene razón el profesor Frink? ¿Por qué?
- j. El alcalde Diamante —nada que ver con lo que dijo Homero— decide que ambos individuos deben consumir la misma cantidad de cada bien en el equilibrio walrasiano, y para ello redistribuirá las dotaciones iniciales sin distorsionar los precios de mercado. ¿Cuáles deben ser las nuevas dotaciones iniciales? ¿Logró el alcalde su objetivo sin afectar la eficiencia?

## Economía $2 \times 2$

Considere una economía con dos individuos que consumen dos bienes  $x$  e  $y$ . Sus funciones de utilidad son:

$$U_1 = x_1^{0,7} y_1^{0,3}$$

$$U_2 = x_2^{0,9} y_2^{0,1}$$

con dotaciones iniciales  $\omega_1 = (20, 10)$  y  $\omega_2 = (15, 15)$ .

- a. Grafique la caja de Edgeworth indicando las dotaciones iniciales, las curvas de indiferencia que pasan por las dotaciones, la curva de contrato y el núcleo.
- b. Encuentre el nivel de utilidad inicial de cada individuo.
- c. Encuentre una expresión general para las curvas de indiferencia de cada individuo y explique qué representa una curva de indiferencia.

- d. Obtenga la curva de contrato y explique qué representa. Defina óptimo de Pareto y compruebe si la dotación inicial es uno.
- e. Encuentre el equilibrio walrasiano: precio de equilibrio y cantidades consumidas por cada individuo. Asuma  $p_x = 1$ .
- f. ¿Se cumple el primer teorema del bienestar? Explique el teorema y verifíquelo matemáticamente.
- g. Muestre que ambos individuos se benefician del intercambio respecto a su situación inicial.
- h. Considere ahora que las preferencias y dotaciones cambian a:

$$U_1(x, y) = 2x_1 + y_1$$

$$U_2(x, y) = \min\{x_2, y_2\}$$

con dotaciones  $\omega_1 = (18, 0)$  y  $\omega_2 = (0, 18)$ . Grafique la caja de Edgeworth incluyendo las curvas de indiferencia y las dotaciones iniciales.

- i. ¿Es posible encontrar los puntos Pareto-eficientes igualando las TMS? Justifique.
- j. Muestre la relación de precios que existe en este problema y determine las asignaciones de equilibrio.

### **Economía $2 \times 2 \times 2$**

Considere una economía cerrada con dos individuos ( $i = \alpha, \beta$ ), dos bienes ( $x, y$ ) y dos factores de producción ( $K, L$ ). Las funciones de utilidad de los individuos son:

$$U_i(x, y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

Las tecnologías de producción son:

$$x = K_x^{\frac{1}{2}} L_x^{\frac{1}{2}}, \quad y = 2K_y^{\frac{1}{2}} L_y^{\frac{1}{2}}$$

Las dotaciones totales de factores satisfacen:

$$L_x + L_y = \bar{L} = 400, \quad K_x + K_y = \bar{K} = 100$$

donde los subíndices denotan la cantidad del factor asignada a cada sector productivo. Finalmente, se define una función de bienestar social:

$$W(U_\alpha, U_\beta) = U_\alpha^{\frac{3}{5}} U_\beta^{\frac{2}{5}}$$

- Explique qué representan las restricciones de factores  $L_x + L_y = \bar{L}$  y  $K_x + K_y = \bar{K}$ . ¿Qué supuesto económico subyace a estas ecuaciones?
- Determine la curva de contrato de la producción (conjunto de óptimos de Pareto en la caja de Edgeworth de la producción).
- Encuentre la frontera de posibilidades de producción (FPP).
- Determine la curva de contrato del consumo.
- Obtenga la frontera de posibilidades de utilidad.
- Determine el óptimo social  $W^*$ .
- Obtenga la producción óptima de bienes e indique cuál es la asignación de consumo socialmente deseable entre los individuos.
- Determine la asignación eficiente de factores entre los sectores  $x$  e  $y$  consistente con el óptimo social.

## Referencias

- Levin, J. (2006). General equilibrium. *Microecon. Notes*.
- Mas Collé, A., & Whinston, M. (1995). *Microeconomic Theory*.
- Torres-Martínez, J. P. (2012). *Elementos de Economía Matemática*.
- Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach*. WW Norton & Company.

---

---

## CAPÍTULO 2

---

# EL PROBLEMA DEL TIEMPO Y DEL RIESGO

### 2.1. Optimización intertemporal y aversión al riesgo

El economista y estadístico **Irving Fisher** desarrolló uno de los modelos más influyentes para comprender cómo los individuos toman decisiones de consumo a lo largo del tiempo. El objetivo de esta sección es modelar el comportamiento de un individuo que, por defecto, prefiere suavizar su consumo en el tiempo, pero que bajo diversas fuerzas lo distribuye de manera desigual entre períodos. Además de identificar dichas fuerzas, se introduce el concepto de aversión al riesgo para entender la sensibilidad del consumidor ante ellas.

**Irving Fisher (1867–1947):**  
*Economista y estadístico estadounidense, reconocido por sus contribuciones a la teoría económica: la ecuación de Fisher, la hipótesis de Fisher y el teorema de separación de Fisher, entre otras.*

## 2.2. Modelo de consumo intertemporal en dos períodos

Los tres factores fundamentales que determinan la distribución del consumo entre períodos son:

- El deseo por suavizar el consumo.
- El costo de la deuda y el premio al ahorro.
- La impaciencia del individuo.

Consideramos un consumidor racional maximizador de utilidad que consume en dos períodos distintos. La cantidad consumida en cada período es  $c_t$ , con  $t = 1, 2$ . Como punto de partida, y antes de introducir el factor de impaciencia, se puede expresar la función de utilidad como:

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2} \quad & u(c_1, c_2) = \ln(c_1) + \ln(c_2) \\ \text{s.a.} \quad & c_1 = y_1, \quad c_2 = y_2 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Esta especificación corresponde al caso especial en que el individuo no es impaciente ( $\rho = 0$ , como se definirá más adelante). El individuo recibe un ingreso exógeno  $y_t$  en cada período y, bajo la restricción de que no puede ahorrar ni endeudarse, la solución es trivial:  $c_1^* = y_1$  y  $c_2^* = y_2$ .

**Restricción intertemporal:**  
Restricción que enfrenta un consumidor con ingresos finitos transferibles entre períodos a través del ahorro o la deuda.

Sin embargo, si el individuo puede transferir recursos entre períodos mediante ahorro o deuda, la restricción se vuelve más rica. A continuación construimos intuitivamente la **restricción intertemporal** a partir de las restricciones de cada período. Los supuestos simplificadores son: el individuo vive dos períodos, la tasa de interés es constante a lo largo del tiempo, y la tasa a la que ahorra es igual a la tasa a la que se endeuda.

### 2.2.1. La restricción intertemporal

En el primer período el individuo recibe un ingreso  $y_1$  y decide cuánto consumir ( $c_1$ ) y cuánto ahorrar o endeudarse ( $s$ ), con  $s > 0$  indicando ahorro y  $s < 0$  indicando deuda. La restricción del primer período es:

$$y_1 = c_1 + s \quad (2.2)$$

En el segundo período el individuo recibe un ingreso  $y_2$  y, adicionalmente, recupera sus ahorros con los intereses correspondientes (o paga su deuda con intereses). Con una tasa de interés  $r \geq 0$ , la restricción del segundo período es:

$$y_2 + s(1 + r) = c_2 \quad (2.3)$$

Combinando (2.2) y (2.3) eliminando  $s$ , obtenemos la restricción intertemporal. Esta puede expresarse de dos formas equivalentes: en **valor futuro** —llevando todos los flujos al período 2— o en **valor presente** —llevando todos los flujos al período 1—:

$$y_1(1 + r) + y_2 = c_1(1 + r) + c_2 \quad (2.4)$$

$$y_1 + \frac{y_2}{1 + r} = c_1 + \frac{c_2}{1 + r} \quad (2.5)$$

Ambas expresiones tienen la misma interpretación: el valor total del consumo debe ser igual al valor total del ingreso, es decir, todo consumo debe estar respaldado por riqueza. La restricción puede graficarse en el plano  $(c_1, c_2)$  como una recta con pendiente  $-(1+r)$ , análoga a una restricción presupuestaria estándar (véase la figura 2.1).

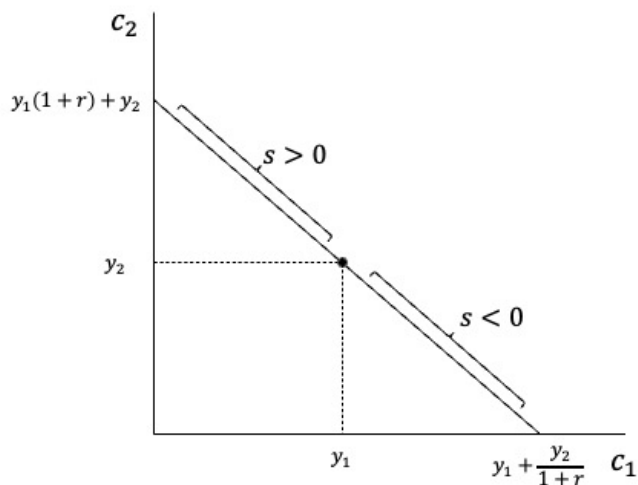
La elección óptima del consumidor sobre esta recta revela si ahorró o se endeudó: si  $c_1 > y_1$  entonces  $s < 0$  (deuda en el período 1, menor consumo en el período 2); si  $c_1 < y_1$  entonces  $s > 0$  (ahorro en el período 1, mayor consumo en el período 2). Ambos casos se ilustran en la figura 2.1.

La tasa de interés  $r$  representa el costo de la deuda y el premio al

**Valor futuro:** Valor que alcanza un monto hoy en un período futuro, considerando las oportunidades de ahorro o inversión.

**Valor presente:** Valor equivalente hoy de un monto futuro, descontado a la tasa de interés vigente.

Figura 2.1: Restricción intertemporal



ahorro: a mayor  $r$ , mayor es el costo de oportunidad de consumir hoy, lo que incentiva postergar el consumo al período 2.

### 2.2.2. La necesidad de suavizar consumo

La idea de suavizar el consumo a lo largo del tiempo resulta bastante intuitiva. Los individuos, en general, prefieren un flujo de consumo estable en el tiempo antes que concentrar todo el consumo en un solo período. Esto se debe a la *utilidad marginal decreciente* del consumo: cada unidad adicional consumida genera menos utilidad que la anterior.

Tomando como ejemplo la función logarítmica:

$$u(c) = \ln(c) \implies u'(c) = \frac{1}{c} > 0, \quad u''(c) = -\frac{1}{c^2} < 0 \quad (2.6)$$

El consumo genera utilidad positiva ( $u' > 0$ ) pero a tasa decreciente ( $u'' < 0$ ). Ante el siguiente problema con  $r = 0$  e ingreso solo en el

## 2.2. MODELO DE CONSUMO INTERTEMPORAL EN DOS PERÍODOS<sup>45</sup>

período 1:

$$\begin{aligned} & \max_{c_1, c_2} \ln(c_1) + \ln(c_2) \\ & \text{s.a. } c_1 + c_2 = y_1 \end{aligned}$$

La solución óptima es  $c_1^* = c_2^* = \frac{y_1}{2}$ : el individuo reparte equitativamente el ingreso entre ambos períodos, pues destinar una unidad adicional al período de menor consumo siempre genera mayor utilidad marginal que asignarla al período de mayor consumo.

### 2.2.3. La impaciencia

La impaciencia es una característica de las preferencias, no una irracionalidad: un agente puede ser impaciente y perfectamente racional. Para modelarla, se descuenta la utilidad del consumo futuro mediante un factor multiplicativo entre 0 y 1. La función de utilidad intertemporal general es:

$$U(c_1, c_2) = u(c_1) + \frac{1}{1 + \rho} u(c_2) \quad (2.7)$$

donde  $\rho > 0$  es la **tasa de impaciencia** (o tasa de descuento subjetiva). Con  $\rho > 0$ , el individuo valora más una unidad de consumo presente que una unidad de consumo futuro idéntica. El caso  $\rho = 0$  corresponde a neutralidad intertemporal: el individuo es indiferente entre consumir hoy o mañana, que es el supuesto implícito en la ecuación (2.1). Por conveniencia, se define  $\beta = \frac{1}{1 + \rho} \in (0, 1)$ , de modo que la función puede escribirse como  $U(c_1, c_2) = u(c_1) + \beta u(c_2)$ .

#### Resumen

La utilidad marginal decreciente lleva a los individuos a suavizar el consumo en el tiempo. Sin embargo, dos fuerzas pueden desviarlo de un consumo perfectamente uniforme: la impaciencia ( $\rho > 0$ ), que induce a consumir más en el presente, y la tasa de interés ( $r$ ),

que representa el costo de oportunidad de consumir hoy en lugar de ahorrar para mañana. El equilibrio entre estas tres fuerzas determina la distribución óptima del consumo entre períodos.

### 2.3. El perfil del consumidor

Con los conceptos introducidos hasta ahora, podemos plantear el siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max_{c_1, c_2} \quad & \{u(c_1) + \beta u(c_2)\} \\ \text{s.a.} \quad & y_1 + \frac{y_2}{1+r} = c_1 + \frac{c_2}{1+r} \end{aligned}$$

Definiendo el lagrangeano y derivando las condiciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \quad & u(c_1) + \beta u(c_2) + \lambda \left( y_1 + \frac{y_2}{1+r} - c_1 - \frac{c_2}{1+r} \right) \\ \text{CPO:} \quad & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = u'(c_1) - \lambda = 0 \\ & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = \beta u'(c_2) - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \\ \text{Igualando } \lambda : \quad & u'(c_1) = \frac{1+r}{1+\rho} u'(c_2) \\ & \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{1+r}{1+\rho} \end{aligned} \tag{2.8}$$

La ecuación (2.8) se denomina **ecuación de Euler del consumo** o, equivalentemente, el *perfil del consumidor*. Establece que en el óptimo, la razón de utilidades marginales entre períodos es igual al cociente entre la tasa de interés y la tasa de impaciencia.

Por ejemplo, un aumento en la tasa de interés encarece el consumo presente en términos relativos (mayor costo de oportunidad de no

**Ecuación de Euler del consumo:**  
Condición de optimalidad que describe cómo el consumidor asigna el consumo entre períodos, equilibrando la tasa de interés y su impaciencia.

ahorrar), por lo que el individuo traslada consumo hacia el futuro. Al reducirse  $c_1$ , su utilidad marginal presente sube; al aumentar  $c_2$ , su utilidad marginal futura baja. Ambos efectos restablecen la igualdad (2.8).

### Dinámicas de ajuste ante cambios exógenos

De la ecuación de Euler se desprende que la tasa de interés y la tasa de impaciencia actúan en sentidos opuestos:  $r$  incentiva el ahorro y el consumo futuro, mientras que  $\rho$  incentiva el consumo presente y el endeudamiento. Estos ajustes pueden descomponerse en **efecto sustitución** y **efecto ingreso**, interpretando  $r$  como el precio relativo del consumo presente frente al consumo futuro.

El *efecto sustitución* es independiente de la posición del individuo: un aumento en  $r$  encarece el consumo presente, por lo que siempre induce a sustituir consumo presente por consumo futuro.

El *efecto ingreso*, en cambio, depende de si el individuo es acreedor o deudor. Si es acreedor (ahorrador), un aumento en  $r$  incrementa el valor futuro de sus ahorros, haciéndolo más rico: consume más en ambos períodos. Si es deudor, un aumento en  $r$  eleva el costo de su deuda, empobreciéndolo: consume menos en ambos períodos. En consecuencia, el efecto neto sobre el consumo presente de un acreedor es ambiguo, pues el efecto sustitución y el efecto ingreso van en sentidos opuestos.

**Efecto sustitución:**  
Cambio en la demanda de un bien provocado por una variación en su precio relativo, manteniendo el bienestar constante.

**Efecto ingreso:**  
Cambio en la demanda de un bien provocado por una variación en el poder adquisitivo del consumidor.

### Funciones de utilidad con aversión al riesgo

Hasta ahora, la ecuación de Euler (2.8) implica que un cambio de 1 % en el precio relativo  $(1 + r)/(1 + \rho)$  genera exactamente un ajuste de 1 % en la razón de utilidades marginales. Esto se puede

ver tomando logaritmos:

$$\ln \left( \frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} \right) = \ln(1+r) - \ln(1+\rho)$$

$$\frac{\partial \ln(u'(c_1)/u'(c_2))}{\partial \ln(1+r)} = 1$$

Sin embargo, este resultado es específico a la función logarítmica y no incorpora explícitamente la aversión al riesgo del consumidor. Un caso ampliamente utilizado en modelos macroeconómicos y de consumo son las funciones de **aversión relativa al riesgo constante** (CRRA, por sus siglas en inglés):

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma} & \text{si } \sigma > 0, \sigma \neq 1 \\ \ln(c) & \text{si } \sigma = 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

El parámetro  $\sigma > 0$  mide la aversión al riesgo del consumidor. Nótese que el caso logarítmico ( $\sigma = 1$ ) es el límite de la expresión general cuando  $\sigma \rightarrow 1$ .

La utilidad marginal de la función CRRA es  $u'(c) = c^{-\sigma}$ . Sustituyendo en la condición de optimalidad (2.8):

$$\frac{c_1^{-\sigma}}{c_2^{-\sigma}} = \frac{1+r}{1+\rho} \iff \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{\sigma} = \frac{1+r}{1+\rho} \quad (2.10)$$

A partir de esta expresión se define la **elasticidad intertemporal de sustitución** (EIS) como el cambio porcentual en la razón  $c_2/c_1$  ante un cambio de 1 % en el precio relativo  $(1+r)$ :

$$\text{EIS} = \frac{\partial \ln(c_2/c_1)}{\partial \ln(1+r)} = \frac{1}{\sigma} \quad (2.11)$$

Un mayor  $\sigma$  implica una menor EIS: el consumidor ajusta menos su perfil de consumo ante cambios en la tasa de interés. En el límite, un individuo con  $\sigma \rightarrow \infty$  no ajusta su consumo en absoluto ante cambios en las condiciones de mercado; en el extremo opuesto,  $\sigma \rightarrow 0$  implica una sustitución perfecta entre consumo presente y futuro.

**Elasticidad intertemporal de sustitución (EIS):**  
Cambio porcentual en la razón de consumo futuro a consumo presente ante un cambio de 1 % en el precio relativo entre períodos (tasa de interés).

## 2.4. Restricciones de liquidez

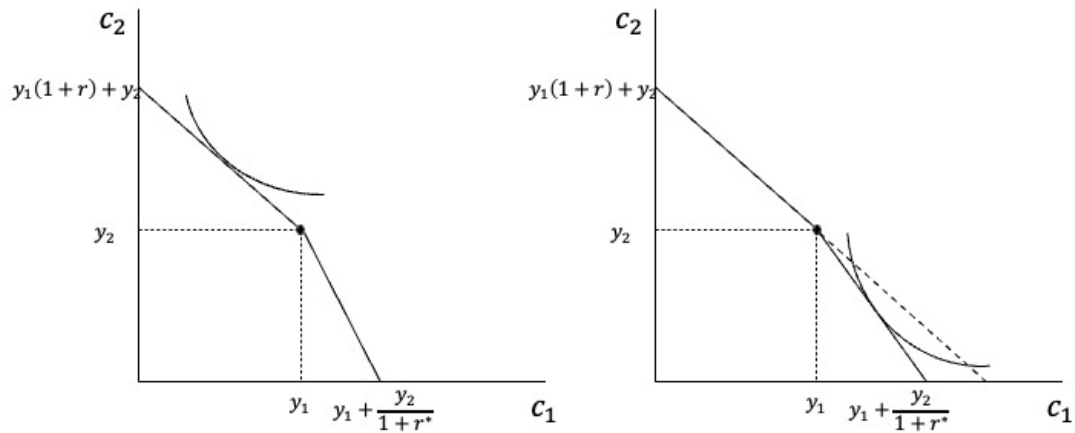
Hasta ahora se ha supuesto que la tasa a la que el individuo ahorra y la tasa a la que se endeuda son iguales e iguales a  $r$ . Un enfoque más realista reconoce que la tasa de endeudamiento  $r^*$  es generalmente mayor que la tasa de ahorro  $r$ , debido al riesgo de impago: el prestamista exige una prima por el riesgo de que el deudor no cumpla sus obligaciones. Mercados financieros menos desarrollados, como los presentes en economías en vías de desarrollo, suelen exhibir mayores diferenciales entre ambas tasas, lo que se traduce en restricciones de liquidez más severas con diversas implicancias macroeconómicas.<sup>1</sup>

Las **restricciones de liquidez** hacen referencia específicamente a las restricciones al endeudamiento. Sus efectos sobre el bienestar dependen de la posición del individuo (figura 2.2). Si el individuo prefiere ahorrar, la restricción no está activa: la tasa de endeudamiento más alta no le afecta. Si, en cambio, el individuo preferiría endeudarse, la restricción sí está activa: el punto que maximizaba su utilidad deja de ser factible y hay una pérdida de bienestar. En general, las restricciones de liquidez tienen efectos no positivos sobre el bienestar, pues reducen el conjunto de opciones factibles del consumidor.

---

<sup>1</sup>Entre ellas: menor inversión, amplificación del ciclo económico, racionamiento del crédito e ineficiencias que perpetúan la desigualdad.

Figura 2.2: Restricciones de liquidez y pérdida de bienestar



## Ejercicios

### Optimización intertemporal con incertidumbre

Suponga un individuo que con certeza vive dos períodos, pero con probabilidad  $p \in (0, 1)$  vivirá un tercer período. Al final del primer período —después de haber consumido en ese período, pero antes de consumir en el segundo— el individuo descubre si vivirá uno o dos períodos adicionales.

Por simplicidad, asuma  $r = 0$ ,  $\rho = 0$ , preferencias logarítmicas e ingresos  $y_1 > 0$  solo en el primer período.

- Plantee el problema de optimización intertemporal del individuo y explique por qué toma esa forma.
- Encuentre el patrón de consumo óptimo en cada período para

cada escenario posible. *Hint: use el método de multiplicadores de Lagrange.*

- c. Explique intuitivamente cómo el individuo realiza este proceso de optimización y cuál es el resultado.
- d. ¿Qué ocurre con el consumo en el primer período cuando aumenta  $p$ ? ¿Cuál de las fuerzas que componen la ecuación de Euler está presente en este caso? Explique matemática e intuitivamente. *Hint: considere la relación del individuo con el riesgo.*

## Stuart y el consumo intertemporal de papayas

Stuart planifica su consumo en dos períodos. Sus preferencias son muy particulares: desea consumir exactamente el triple en el primer período de lo que consumirá en el segundo. Stuart sabe que sus ingresos como minion serán \$500 en el primer período y \$600 en el segundo. Tiene acceso a un mercado financiero con tasa de interés del 5 % (igual para ahorrar y endeudarse).

- a. Formule la restricción presupuestaria intertemporal de Stuart.
- b. Encuentre los consumos óptimos de Stuart en cada período.
- c. ¿Es Stuart acreedor o deudor? ¿Por qué?
- d. Suponga que la tasa de interés baja a 1 %. ¿Cómo cambia la situación de Stuart? ¿Pasa a ser acreedor o deudor? Explique qué ocurre con la pendiente y el intercepto de la nueva restricción presupuestaria.

Tras mucho deliberar, Stuart decide abandonar la colonia e irse a vivir solo a una montaña. El año pasado le diagnosticaron cáncer, y los médicos le informan que no le quedan más de dos períodos de

vida. Stuart se convierte así en un minion ermitaño y autárquico. Su única fuente de ingresos es una plantación de papayas: cosecha 100 unidades al inicio de cada período. Sin embargo, las papayas se deterioran a una tasa del 10 % por período, lo que implica una tasa de interés efectiva de  $r = -0,10$  (guardar papayas para mañana implica una pérdida del 10 %).

- e. Dibuje la restricción presupuestaria intertemporal de Stuart. Si su función de utilidad es  $u(c_1, c_2) = c_1 + c_2$ , ¿cuánto consume en cada período?
- f. Ahora suponga que la función de utilidad de Stuart es  $u(c_1, c_2) = 8c_1 + 10c_2$ . ¿Cuánto consume en cada período? Justifique.

Milagrosamente, Stuart se cura del cáncer y regresa a la colonia. Vive dos períodos más con preferencias  $u(c_1, c_2) = c_1^{0,3} c_2^{0,2}$ , recibe ingresos de \$1.000 en el primer período y \$200 en el segundo, y tiene acceso a una tasa de interés del 10 %.

- g. Plantee las restricciones de cada período y consolídelas en una única restricción intertemporal.
- h. Calcule los consumos óptimos en cada período.
- i. Calcule el ahorro. ¿Stuart es acreedor o deudor?
- j. ¿Por qué el Estado obliga a los individuos a ahorrar parte de su ingreso presente, independientemente de sus preferencias intertemporales?

## Referencias

CORE Team. (2017). *The Economy: Economics for a Changing World*. Oxford University Press.

De Gregorio, J. (2007). Macroeconomía. *Teoría y políticas*.

Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach*. WW Norton & Company.



---

---

## CAPÍTULO 3

---

# EL PROBLEMA DE LA COOPERACIÓN Y LA COORDINACIÓN

La teoría de juegos estudia los comportamientos estratégicos en la interacción entre distintos agentes. El factor estratégico surge del hecho de que las decisiones de los demás jugadores afectan los resultados posibles para cada uno. Modelar estas interacciones permite identificar, por ejemplo, las condiciones que favorecen la colusión en mercados imperfectos, y sirve de punto de partida para entender herramientas anticolusivas como la delación compensada.

Esta rama es fuertemente matemática, aunque este texto no tiene como objetivo presentar las definiciones de manera formalmente rigurosa. Se estudiarán juegos simultáneos de un turno, juegos

secuenciales e iterados, entre otros. Luego se aplicará este instrumental a la competencia imperfecta, donde las firmas deben elegir racionalmente su mejor estrategia frente a las demás para maximizar sus beneficios.

En todos los juegos que veremos es posible identificar tres elementos comunes que definen un **juego en forma normal**: jugadores, estrategias y pagos. Los jugadores son quienes toman decisiones de manera estratégica para maximizar su pago, anticipando las decisiones de los demás.

### 3.1. Juegos en forma normal

En juegos simultáneos los jugadores toman decisiones al mismo tiempo; estas decisiones interactúan y determinan los pagos de cada uno. El pago refleja el nivel de utilidad que obtiene el agente en cada resultado posible del juego.

Para dos agentes  $A$  y  $B$ , cada uno elige entre las estrategias  $X$  e  $Y$ . La combinación de decisiones determina los pagos, los cuales pueden representarse mediante una **matriz de pagos** como la del cuadro 3.1.

Cuadro 3.1: Matriz de pagos

|     |     | $B$      |          |
|-----|-----|----------|----------|
|     |     | $X$      | $Y$      |
| $A$ | $X$ | $(a, b)$ | $(c, d)$ |
|     | $Y$ | $(e, f)$ | $(g, h)$ |

La tabla se lee de la siguiente manera: si  $A$  elige  $X$  y  $B$  elige  $Y$ , los pagos son  $(c, d)$ , donde  $c$  corresponde al pago de  $A$  y  $d$  al de  $B$ . De igual modo, si ambos eligen  $Y$ , los pagos son  $(g, h)$ .

La matriz muestra el componente estratégico: los pagos posibles

**Juego en forma normal:** Juego en que cada jugador elige simultáneamente una estrategia, resultando en un pago que depende de la combinación de estrategias elegidas.

**Matriz de pagos:** Representación de un juego en forma normal que muestra los pagos de cada jugador para cada combinación posible de estrategias.

para  $A$  dependen directamente de la decisión de  $B$ . Por ello, los jugadores anticipan las decisiones del otro. Si  $A$  sabe que  $B$  elige  $X$ , su decisión se reduce a comparar los pagos  $a$  y  $e$ , como se ilustra en el cuadro 3.2.

Cuadro 3.2: Decisiones de  $A$  dado que  $B$  elige  $X$

|     |     | $B$      |          |
|-----|-----|----------|----------|
|     |     | $X$      | $Y$      |
| $A$ | $X$ | $(a, b)$ | $(c, d)$ |
|     | $Y$ | $(e, f)$ | $(g, h)$ |

### Notación.

El total de jugadores se denota  $n$ , e indexamos a cada jugador como  $i = 1, \dots, n$ . Las estrategias de cada jugador se denotan  $s_i$ , y el conjunto de estrategias del juego es  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ . Los pagos de cada jugador se denotan  $u_i$  (también se usa  $\pi_i$ ), y el conjunto de pagos es  $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ .

Con estos elementos, y denotando el conjunto de jugadores como  $N = \{1, \dots, n\}$ , el juego se puede escribir como  $J = \{N; S; U\}$ .

En primer lugar estudiaremos juegos en **estrategias puras**, en las que cada jugador elige una acción con certeza. Más adelante veremos que los jugadores también pueden asignar probabilidades a sus estrategias, lo que resulta útil para analizar ciertos juegos donde las estrategias puras no son suficientes.

**Estrategias puras:**  
Estrategia en que el jugador asigna probabilidad 1 a una acción determinada y probabilidad 0 al resto.

### 3.1.1. El dilema del prisionero

El dilema del prisionero describe la situación en que dos sospechosos son detenidos y separados para ser interrogados de manera independiente. Si uno delata al otro y su cómplice no lo hace, el

delator queda libre y el otro cumple pena máxima. Si ambos se delatan mutuamente, ambos son condenados a varios años de cárcel. Si ninguno delata, ambos quedan libres o cumplen penas menores. La situación se representa en el cuadro 3.3.

Cuadro 3.3: El dilema del prisionero

|              |          | Prisionero B |           |
|--------------|----------|--------------|-----------|
|              |          | Cooperar     | Delatar   |
| Prisionero A | Cooperar | (-2, -2)     | (-10, -1) |
|              | Delatar  | (-1, -10)    | (-6, -6)  |

Los jugadores deciden su estrategia óptima anticipando la decisión del otro. Si A predice que B delatará, su mejor respuesta es también delatar ( $-1 > -2$ , en términos de años de cárcel). Si A predice que B cooperará, su mejor respuesta sigue siendo delatar ( $-1 > -2$ ). Dado que delatar es la mejor respuesta de A independientemente de lo que haga B, delatar es su **estrategia dominante**. Los jugadores racionales siempre eligen la estrategia dominante cuando existe, pues garantiza el mayor pago posible sin importar lo que hagan los otros.

La matriz es simétrica, por lo que el mismo razonamiento aplica a B: delatar es también su estrategia dominante. El resultado del juego es entonces (Delatar, Delatar), con pagos  $(-6, -6)$ . Este resultado se denomina **equilibrio de Nash**: ningún jugador tiene incentivo a desviarse unilateralmente, dado lo que hace el otro.

Sin embargo, si ambos hubieran cooperado habrían obtenido  $(-2, -2)$ , un resultado mejor para los dos. Bajo el criterio de Pareto, (Cooperar, Cooperar) domina paretianamente al equilibrio (Delatar, Delatar): el equilibrio de Nash es subóptimo en términos de Pareto.

Esta observación tiene amplia aplicabilidad en economía y política. Considérese el caso de dos países con armamento nuclear: si ambos acuerdan desarmarse (cooperan) reducen costos y riesgos. Si uno deserta mientras el otro cumple, el desertor obtiene ventaja militar.

**Estrategia dominante:**  
Estrategia que maximiza el pago de un jugador independientemente de la estrategia elegida por los demás.

**Equilibrio de Nash:**  
Combinación de estrategias tal que ningún jugador tiene incentivo a cambiar unilateralmente su decisión, dadas las estrategias de los demás.

Si ambos desertan, continúan con altos costos y riesgos de conflicto. Ese es el equilibrio de Nash, pues cada país tiene estrategia dominante por no desarmarse. La moraleja económica es que dejar que los agentes decidan según sus propios intereses no siempre conduce al mejor resultado posible para el conjunto, lo que puede justificar la intervención.

### 3.1.2. Otros juegos en forma normal

#### MANO INVISIBLE

La matriz de este juego se encuentra en el cuadro 3.4. La mano invisible describe cómo los individuos que persiguen su propio beneficio contribuyen, sin pretenderlo, al bienestar general. En este juego, el agente A tiene estrategia dominante Y (obtiene 11 o 10 con Y, versus 0 o 1 con X) y el agente B tiene estrategia dominante X (obtiene 10 u 11 con X, versus 1 o 0 con Y). El equilibrio de Nash es (Y, X) con pagos (11, 11), que además es óptimo de Pareto.

Cuadro 3.4: La mano invisible

|          |   | Agente B |         |
|----------|---|----------|---------|
|          |   | X        | Y       |
| Agente A | X | (0, 10)  | (1, 1)  |
|          | Y | (11, 11) | (10, 0) |

Siguiendo las ideas de Adam Smith,

“Los individuos no tratan de promover el interés público ni saben cuánto lo están promoviendo. Solo buscan su propia seguridad, su propia ganancia, para la cual se ven llevados por una mano invisible a promover un fin que no estaba en sus intenciones. Buscando su interés personal suelen promover el de la sociedad más eficazmente que cuando pretenden promoverlo realmente.” (Samuelson & NordHause, 1991)

## GUERRA DE LOS SEXOS

Este juego se representa con la matriz del cuadro 3.5. Una pareja separada e incomunicada en un festival de música debe decidir a qué concierto ir: él prefiere Reggae y ella prefiere EDM. Ambos valoran encontrarse, pero también prefieren el concierto de su gusto. Maximizan su utilidad si coinciden en el concierto de su preferencia.

Cuadro 3.5: Guerra de los sexos

|        |        | Mujer  |        |
|--------|--------|--------|--------|
|        |        | Reggae | EDM    |
| Hombre | Reggae | (2, 1) | (0, 0) |
|        | EDM    | (0, 0) | (1, 2) |

En este juego *no* existe estrategia dominante para ningún jugador: la mejor respuesta de cada uno depende de lo que haga el otro. Si la mujer va a Reggae, el hombre prefiere Reggae ( $2 > 0$ ); si la mujer va a EDM, el hombre prefiere EDM ( $1 > 0$ ). Hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (Reggae, Reggae) y (EDM, EDM). Para obtener un equilibrio único es necesario recurrir a estrategias mixtas, como se verá más adelante.

## LA CAZA DEL VENADO

La matriz de este juego se encuentra en el cuadro 3.6. Dos cazadores deben elegir, sin conocer la decisión del otro, si cazan un venado o un conejo. Cazar el venado requiere cooperación mutua y ofrece mayor recompensa; cazar un conejo es seguro pero de menor valor. Si ambos cooperan y van por el venado, ambos están mejor que si ambos van por conejos.

No existen estrategias dominantes. Hay dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (Venado, Venado) y (Conejo, Conejo). El primero domina paretianamente al segundo. El juego ilustra una tensión entre seguridad y cooperación: ir por el conejo es seguro pero ineficiente; ir por el venado es eficiente pero requiere confianza en

Cuadro 3.6: La caza del venado  
Cazador B

|           |        | Venado | Conejo |
|-----------|--------|--------|--------|
| Cazador A | Venado | (4, 4) | (0, 3) |
|           | Conejo | (3, 0) | (3, 3) |

que el otro cooperará.

### **Sobre la existencia de múltiples equilibrios de Nash en estrategias puras.**

Un error frecuente es interpretar los equilibrios de Nash como predicciones únicas del resultado de un juego. En la caza del venado existen dos equilibrios de Nash simultáneamente, lo que no significa que ambos ocurran a la vez, sino que cualquiera de los dos es consistente con el comportamiento racional de los jugadores.

El equilibrio de Nash refiere a una combinación de estrategias tal que ningún jugador tiene incentivo a desviarse unilateralmente, dadas las estrategias de los demás. Que un perfil sea equilibrio de Nash no implica que sea el resultado observado: puede haber múltiples equilibrios, e incluso ninguno en estrategias puras (como en el cachipún, cuadro 3.8).

### **CHICKEN**

La matriz de este juego se encuentra en el cuadro 3.7. Dos conductores avanzan en sentidos contrarios por un puente de un solo carril. Cada uno debe decidir si cede el paso o sigue adelante. El primero en ceder queda como "gallina"; si ninguno cede, chocan. Cada jugador prefiere hacer lo opuesto a lo que hace el otro: si el otro cede, conviene seguir; si el otro sigue, conviene ceder.

Los equilibrios de Nash en estrategias puras son (Ceder, Seguir) y (Seguir, Ceder). Se trata de un juego de anti-coordinación: a diferencia del dilema del prisionero o la caza del venado, aquí conviene

Cuadro 3.7: Chicken

|            |                   | Corredor B      |                   |
|------------|-------------------|-----------------|-------------------|
|            |                   | Ceder (gallina) | Seguir (valiente) |
| Corredor A | Ceder (gallina)   | (2, 2)          | (1, 3)            |
|            | Seguir (valiente) | (3, 1)          | (0, 0)            |

hacer lo opuesto al otro jugador.

CACHIPÚN

En el cachipún (piedra-papel-tijera), cuadro 3.8, no existe equilibrio de Nash en estrategias puras: ante cualquier combinación de estrategias, siempre hay al menos un jugador con incentivo a cambiar su decisión. De ahí su utilidad para decidir al azar.

Cuadro 3.8: Cachipún

|   |        | A       |         |         |
|---|--------|---------|---------|---------|
|   |        | Piedra  | Papel   | Tijera  |
| B | Piedra | (0, 0)  | (−1, 1) | (1, −1) |
|   | Papel  | (1, −1) | (0, 0)  | (−1, 1) |
|   | Tijera | (−1, 1) | (1, −1) | (0, 0)  |

3.1.3. Estrategias mixtas

Algunos juegos, como el cachipún o el Chicken, no tienen equilibrio de Nash en estrategias puras, o tienen múltiples equilibrios entre los cuales no hay forma de decidir sin información adicional. En estos casos, la incertidumbre es un elemento constitutivo del juego y no puede ignorarse en el análisis.<sup>1</sup>

Las **estrategias mixtas** consisten en asignar una distribución de

<sup>1</sup>Para definiciones matemáticas más rigurosas en el contexto de competencia imperfecta, véase Fischer (2024).

probabilidad sobre el conjunto de acciones disponibles, en lugar de elegir una acción con certeza. Cada jugador elige un vector de probabilidades  $p_i$  tal que  $\sum_k p_{ik} = 1$ .

Para ilustrarlo, consideremos los penales en fútbol. El jugador elige hacia qué lado patear y el arquero elige hacia qué lado tirarse, sin que ninguno conozca la decisión del otro de antemano. La matriz de pagos es:

|         |           | Arquero   |         |
|---------|-----------|-----------|---------|
|         |           | Izquierda | Derecha |
| Jugador | Izquierda | (0, 0)    | (1, -1) |
|         | Derecha   | (1, -1)   | (0, 0)  |

Sea  $p$  la probabilidad con que el jugador patea a la derecha y  $q$  la probabilidad con que el arquero se tira a la derecha. Las combinaciones posibles y sus probabilidades son:

| Estrategias | Probabilidad            | Pago Jugador | Pago Arquero |
|-------------|-------------------------|--------------|--------------|
| D,D         | $p \cdot q$             | 0            | 0            |
| D,I         | $p \cdot (1 - q)$       | 1            | -1           |
| I,D         | $(1 - p) \cdot q$       | 1            | -1           |
| I,I         | $(1 - p) \cdot (1 - q)$ | 0            | 0            |

La utilidad esperada del jugador es:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^J) &= p(1 - q) \cdot 1 + (1 - p)q \cdot 1 \\ &= p - pq + q - pq = p(1 - 2q) + q\end{aligned}$$

Y la del arquero:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U^A) &= p(1 - q) \cdot (-1) + (1 - p)q \cdot (-1) \\ &= -p + pq - q + pq = q(2p - 1) - p\end{aligned}$$

Para encontrar el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, cada jugador elige  $p$  (o  $q$ ) para maximizar su utilidad esperada, anticipando la estrategia del otro. En la utilidad esperada del jugador, el término relevante es  $(1 - 2q)$ :

- Si  $q > 1/2$ : el arquero tiende a tirarse a la derecha, por lo que el jugador maximiza pateando a la izquierda ( $p = 0$ ).
- Si  $q < 1/2$ : el arquero tiende a tirarse a la izquierda, por lo que el jugador maximiza pateando a la derecha ( $p = 1$ ).
- Si  $q = 1/2$ : el jugador es indiferente entre cualquier  $p \in [0, 1]$ .<sup>2</sup>

Por simetría del juego, el arquero sigue el razonamiento análogo respecto a  $p$ . El equilibrio de Nash en estrategias mixtas es  $p^* = q^* = 1/2$ : ambos jugadores aleatorizan uniformemente entre sus dos opciones.

La incertidumbre no es solo un obstáculo sino que puede ser instrumentalizada estratégicamente. Las auditorías aleatorias de fiscalización tienen precisamente este fundamento: el fiscalizador no elige siempre fiscalizar (lo que sería prohibitivamente costoso), sino que asigna probabilidades a fiscalizar y no fiscalizar de manera tal que, en el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, el agente fiscalizado no tenga incentivos a incumplir. La probabilidad óptima de auditoría se determina exactamente por este criterio.

## 3.2. Juegos secuenciales

En muchas interacciones los agentes no deciden simultáneamente. En el ajedrez, por ejemplo, los jugadores se alternan por turnos. Pa-

<sup>2</sup>Técnicamente, la función de mejor respuesta no es una función sino una correspondencia en este punto, pero esto no genera problemas para el análisis del curso.

ra modelar estas situaciones se utilizan los juegos secuenciales, que son una forma extendida de los juegos simultáneos. Mientras que en los juegos simultáneos las estrategias son acciones individuales (cooperar, delatar, etc.), en los juegos secuenciales las estrategias son planes de acción completos que especifican qué hacer en cada nodo posible del juego.

Para representar estas interacciones se utiliza la **forma extensiva**, un esquema en forma de árbol en que cada nodo representa un punto de decisión y cada rama representa una acción posible. Estos esquemas se denominan **árboles de decisión**.

Para ilustrarlo con un ejemplo económico: en un mercado monopolístico sin barreras de entrada, una empresa potencial puede amenazar con entrar. En el primer período, la entrante decide si entra o no. En el segundo período, el monopolio decide si se adapta a la competencia (duopolio) o aplica precios predatorios para expulsar a la entrante. Los pagos son los siguientes: si la entrante no entra, el monopolio mantiene sus beneficios monopolísticos (0, 10); si entra y el monopolio se adapta, los pagos son (2, 5); si el monopolio aplica precios predatorios, los pagos son (-5, 0).

**Juego en forma extensiva:**

Representación de un juego en que las decisiones se toman secuencialmente a lo largo del tiempo, mediante un árbol de decisión.

**Árbol de decisión:**

Representación gráfica de un juego en forma extensiva.

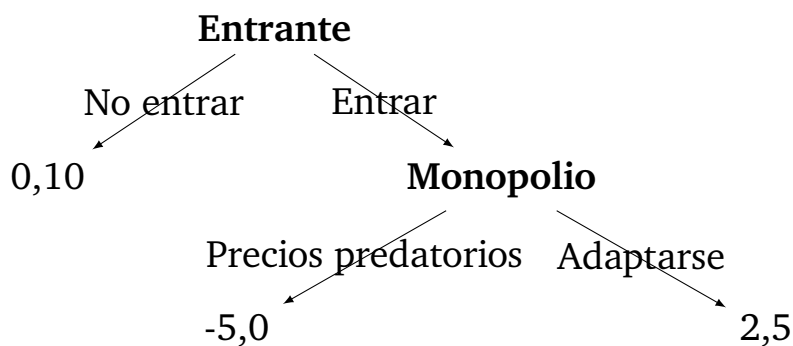


Figura 3.1: Juego en forma extensiva de entrada

Estos árboles permiten encontrar el equilibrio resolviendo por *inducción hacia atrás*: se parte del nodo más lejano y se determina la decisión óptima en cada nodo, avanzando hacia el nodo inicial. En la figura 3.1, se empieza por el nodo del monopolio: adaptarse le

da 5 y los precios predatorios le dan 0, por lo que elegiría adaptarse. Conociendo esto, la entrante anticipa que si entra obtendrá 2, y si no entra obtendrá 0; por tanto, entra. El equilibrio del juego es la secuencia (Entrar, Adaptarse), resaltada en la figura 3.2.

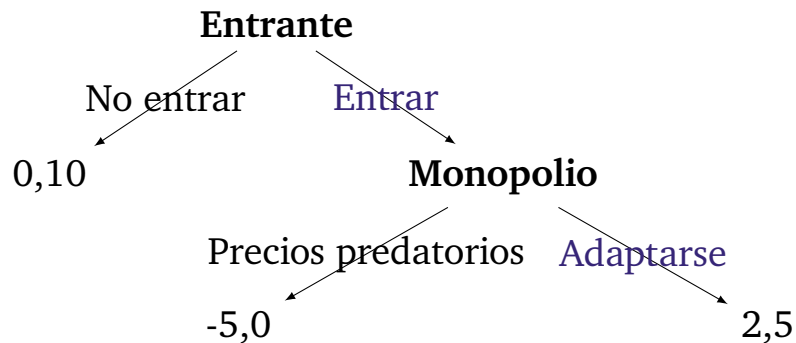


Figura 3.2: Solución por inducción hacia atrás; respuestas óptimas en morado

### Ajedrez, un juego secuencial

Resolver por inducción hacia atrás equivale a anticipar las respuestas del rival. Así piensan los ajedrecistas: al evaluar un movimiento, consideran las posibles respuestas del contrincante y las contrarrespuestas propias. Un movimiento que parece ventajoso puede descartarse al anticipar una buena defensa rival en el turno siguiente. La capacidad de adelantar más turnos es un buen indicador del nivel de un ajedrecista.

#### **Equilibrio perfecto en subjuegos (EPS):**

*Refinamiento del equilibrio de Nash en juegos extensivos. Requiere que las estrategias sean óptimas en cada subjuego posible, no solo en el juego completo. Elimina los equilibrios sostenidos por amenazas no creíbles.*

### 3.2.1. Equilibrios de Nash y equilibrios perfectos en subjuegos

Al resolver por inducción hacia atrás encontramos un tipo específico de equilibrio denominado **equilibrio perfecto en subjuegos (EPS)**. Si expresamos el juego de entrada en forma normal (cuadro 3.3), encontramos el equilibrio de Nash: el monopolio tiene estra-

tegia dominante por adaptarse, por lo que la entrante entra. El EN coincide con el EPS en este caso, pero *esto no siempre ocurre*.

Figura 3.3: Dominio sobre el mercado en forma normal

|          |           | Monopolio           |           |
|----------|-----------|---------------------|-----------|
|          |           | Precios predatorios | Adaptarse |
| Entrante | No entrar | (0, 10)             | (0, 10)   |
|          | Entrar    | (-5, 0)             | (2, 5)    |

### Dominio sobre Berlín

Considérese el juego secuencial de la figura 3.4. Al resolver por inducción hacia atrás, la Unión Soviética, si llega al nodo de decisión, prefiere el bloqueo (0) a la guerra (-10). Anticipando esto, Estados Unidos prefiere no ceder ( $0 > -5$ ). El EPS es (No cede, Bloqueo).

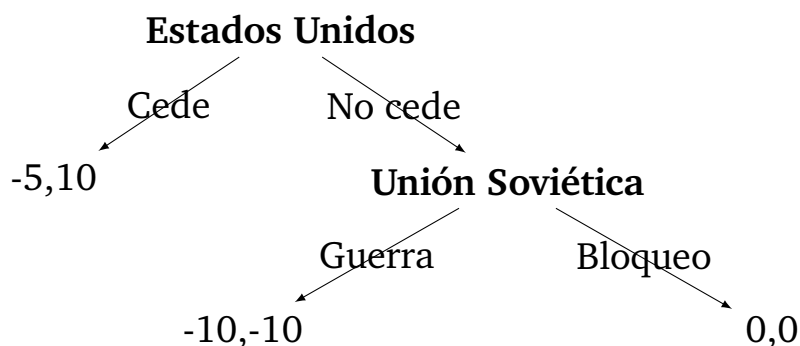


Figura 3.4: Juego secuencial del dominio sobre Berlín

Al representar el mismo juego en forma normal (cuadro 3.9), aparecen dos equilibrios de Nash: (No cede, Bloqueo) y (Cede, Guerra). El segundo equilibrio, sin embargo, descansa en una **amenaza no creíble**: la Unión Soviética amenaza con ir a la guerra si Estados Unidos no cede, pero si efectivamente no cede, ir a la guerra le generaría -10 mientras que el bloqueo le generaría 0. Esa amenaza no es racional ejecutar, y por tanto no debería influir en la decisión de Estados Unidos.

**Amenaza creíble:**  
Estrategia que un jugador tiene incentivo a ejecutar si llega el momento, y que por tanto influye racionalmente sobre las decisiones de los demás.

Cuadro 3.9: Dominio sobre Berlín en forma normal  
Unión Soviética

|                |         | Guerra                             | Bloqueo                          |
|----------------|---------|------------------------------------|----------------------------------|
| Estados Unidos | Cede    | $(\underline{-5}, \underline{10})$ | $(-5, 10)$                       |
|                | No cede | $(-10, -10)$                       | $(\underline{0}, \underline{0})$ |

El EPS elimina los equilibrios de Nash sostenidos por amenazas no creíbles, refinando la predicción del juego. La relación entre ambos conceptos se resume a continuación:

### Equilibrios de Nash y equilibrios perfectos en subjuegos

Todo EPS es un EN, pero no todo EN es un EPS. El EPS refina el concepto de EN en juegos secuenciales, eliminando los equilibrios sostenidos por amenazas que no sería racional ejecutar si llegara el momento de hacerlo.

### Juegos iterados

Queda pendiente el análisis de los juegos iterados: juegos de múltiples períodos que son una forma particular de los juegos en forma extensiva. Conviene estudiarlos en el contexto de la competencia imperfecta y la colusión.

Con este instrumental es posible encontrar, bajo ciertas condiciones, equilibrios cooperativos en situaciones como el dilema del prisionero, donde la forma normal conduce inevitablemente a un equilibrio no cooperativo subóptimo de Pareto.

## Ejercicios

### Ainhoa y Bernat

Suponga una interacción estratégica entre dos jugadores con utilidad lineal, descrita por la siguiente matriz de pagos:

|        | Equeer | Eskuineko |
|--------|--------|-----------|
| Ireki  | (0, 0) | (0, 9)    |
| Behera | (2, 0) | (-1, 9)   |

- Explique en qué consiste y cómo se define un equilibrio de Nash.
- Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras.
- Explique en qué consiste una estrategia mixta.
- Encuentre las funciones de reacción de Ainhoa y Bernat en estrategias mixtas y calcule los equilibrios de Nash en estrategias mixtas.
- Represente gráficamente el equilibrio utilizando las funciones de reacción y explíquelo.

### Juego asimétrico

Considere un juego asimétrico entre los jugadores  $J_1$  y  $J_2$ , donde  $J_1$  tiene dos estrategias disponibles y  $J_2$  tiene tres, con los pagos descritos en la siguiente matriz:

|   | C      | D       | E       |
|---|--------|---------|---------|
| A | (1, 1) | (3, 0)  | (-2, 3) |
| B | (2, 2) | (4, -1) | (0, 0)  |

- a. Identifique el equilibrio de Nash en estrategias puras y justifique su respuesta.
- b. Sea  $p$  la probabilidad de que  $J_1$  elija A,  $q_1$  la probabilidad de que  $J_2$  elija C, y  $q_2$  la de que elija D. Describa los escenarios posibles y sus probabilidades de ocurrencia.
- c. Obtenga las utilidades esperadas de cada jugador.
- d. A partir de la utilidad esperada de  $J_2$ , obtenga el valor crítico de  $q_2$  que reconfigura el juego. Explique qué conclusiones se obtienen.
- e. Considerando lo obtenido en (d), encuentre los valores críticos y las funciones de reacción de  $J_1$  y  $J_2$ . *Pista: considere la nueva forma reducida de la matriz.*
- f. Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, represéntelo gráficamente y explique por qué corresponde al equilibrio.

### 3.3. Competencia imperfecta

En esta sección modelamos la interacción estratégica de las firmas en mercados de competencia imperfecta utilizando la teoría de juegos. A diferencia de la competencia perfecta, donde las firmas son tomadoras de precios, en competencia imperfecta existe un componente estratégico relevante: las decisiones de una firma afectan los beneficios de sus rivales, y viceversa.

Los **oligopolios** son la forma más estudiada de competencia imperfecta. En un oligopolio, un número reducido de empresas tiene control parcial sobre el precio de mercado, situándose entre el poder monopolístico pleno y la ausencia de poder de mercado propia de la competencia perfecta.<sup>3</sup>

Dado que todas las firmas afectan el precio, existe **interdependencia estratégica**: las decisiones de producción o precio de una firma repercuten sobre las demás. Por ejemplo, si una firma reduce su precio, su rival podría responder bajando el suyo para no perder demanda; si una firma anticipa que su rival producirá mucho, le conviene producir menos para no deprimir el precio. En consecuencia, las firmas forman creencias sobre las estrategias de sus competidoras para tomar sus decisiones de manera óptima.

#### La estrategia desde la teoría de juegos

El marco analítico para estudiar estas interacciones proviene de la **organización industrial**, y se formaliza mediante la teoría de juegos. Como se mencionó antes, los jugadores forman creencias sobre las estrategias de los demás para determinar su mejor respuesta.

Comenzaremos con juegos en forma normal (simultáneos): las fir-

**Oligopolio:**

*Estructura de mercado con un número reducido de firmas, cada una con capacidad de incidir sobre el precio de mercado.*

**Interdependencia**

**estratégica:** *Situación en que las decisiones óptimas de una firma dependen de las decisiones que tomen sus rivales, y viceversa.*

**Organización**

**industrial:** *Área de la economía que estudia la estructura de los mercados y las interacciones estratégicas entre las firmas que los componen.*

<sup>3</sup>Esta caracterización tiene matices importantes: bajo competencia a la Bertrand, con tan solo dos firmas se puede llegar al resultado de competencia perfecta. Aunque las empresas fijan sus propios precios, la competencia puede ser tan intensa que el precio converja al costo marginal.

mas  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  son agentes racionales que eligen simultáneamente una acción  $a_i \in A_i$ , obteniendo un beneficio  $\pi_i(a_i, a_{-i})$  que depende de las acciones propias y de los rivales.

Cada firma elige  $a_i$  para maximizar su beneficio anticipando las decisiones de sus competidores. Dados los rivales eligiendo  $a_{-i}$ , la **mejor respuesta** de la firma  $i$  es la acción  $a_i^*$  tal que:<sup>4</sup>

$$\pi_i(a_i^*, a_{-i}) \geq \pi_i(a_i, a_{-i}), \quad \forall a_i \in A_i \quad (3.1)$$

**Función de reacción:**

*Función que describe la acción óptima de una firma en respuesta a las decisiones de sus competidoras.*

La **función de reacción**  $a_i^*(a_{-i})$  recoge esta respuesta óptima para cada posible acción de los rivales. Cuando todas las firmas eligen simultáneamente su mejor respuesta —es decir, cuando  $a^* = (a_1^*, \dots, a_N^*)$  satisface la condición (3.1) para cada  $i$ — ninguna tiene incentivos a desviarse unilateralmente: estamos en un **equilibrio de Nash**.

A continuación presentamos dos modelos de competencia imperfecta que difieren en la variable estratégica que manejan las firmas: el precio (Bertrand) y la cantidad producida (Cournot). Estas decisiones son relevantes principalmente en el corto plazo; en el largo plazo, las decisiones pueden involucrar inversión en I+D o entrada a nuevos mercados, y lo más realista suele ser una combinación de ambas.<sup>5</sup>

### 3.3.1. Competencia a la Bertrand

**Joseph Bertrand (1822–1900):**

*Matemático francés del siglo XIX. Su principal aporte a la economía fue el modelo que lleva su nombre, en el que criticó el análisis de duopolio de Cournot argumentando que las firmas compiten en precios y no en cantidades.*

Este modelo fue planteado por el matemático **Joseph Bertrand** en 1883. Consideramos un duopolio de firmas  $i \in \{1, 2\}$  que ofrecen un producto homogéneo y compiten fijando precios  $p_i$ .

Como los productos son sustitutos perfectos, la firma con el menor precio captura toda la demanda del mercado  $Q(p)$ ; si ambas fijan

<sup>4</sup>Dado que los agentes son racionales, siempre elegirán su mejor respuesta  $a_i^*$ .

<sup>5</sup>Por ejemplo, las firmas pueden elegir cuánto invertir en capacidad en un primer período, condicionando cuánto pueden producir, y luego competir en precios. Véase Allen y Hellwig (1986) y Dixon (1992).

el mismo precio, se reparten la demanda de manera equitativa. Se asume que cada firma puede satisfacer toda la demanda a cualquier precio. Cada firma  $i$  tiene un costo marginal constante  $c_i$ .

Para encontrar el equilibrio, identificamos las funciones de reacción óptimas  $p_i^*(p_{-i})$ . Desde el punto de vista de la firma 1, hay tres casos:

- Si  $p_2 > p_1^M$  (el precio monopolístico de la firma 1): la mejor respuesta es fijar  $p_1 = p_1^M$ , maximizando beneficios mientras captura toda la demanda.
- Si  $c_1 < p_2 \leq p_1^M$ : para capturar toda la demanda conviene fijar un precio marginalmente inferior al rival,  $p_1 = p_2 - \varepsilon$ .
- Si  $p_2 \leq c_1$ : la mejor respuesta es fijar  $p_1 = c_1$ , pues bajar más implicaría pérdidas.

Formalmente:

$$p_1^*(p_2) = \begin{cases} p_1^M & \text{si } p_2 > p_1^M \\ p_2 - \varepsilon & \text{si } c_1 < p_2 \leq p_1^M \\ c_1 & \text{si } p_2 \leq c_1 \end{cases} \quad (3.2)$$

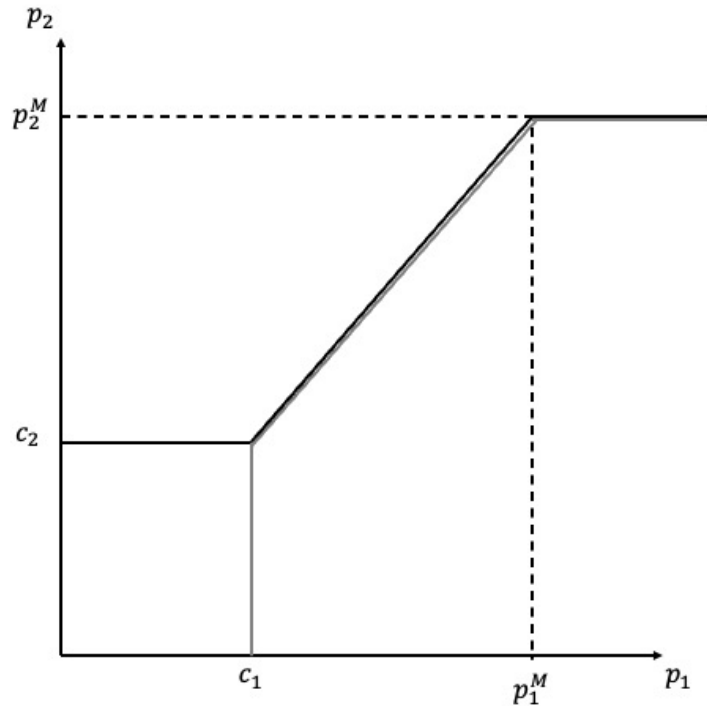
EQUILIBRIO BAJO COMPETENCIA DE PRECIOS. Consideramos dos casos.

*Firmas simétricas* ( $c_1 = c_2 = c$ ): ante cualquier precio del rival superior a  $c$ , la mejor respuesta es fijar un precio ligeramente menor. Este proceso de undercutting mutuo lleva los precios hacia abajo hasta que  $p_1 = p_2 = c$ . Este resultado, conocido como la **paradoja de Bertrand**, muestra que con apenas dos firmas el mercado puede alcanzar el resultado de competencia perfecta. Véase la figura 3.6.

*Firmas asimétricas* ( $c_1 < c_2$ ): la firma más eficiente puede fijar un precio  $p_1 = c_2 - \varepsilon$ , capturando toda la demanda y obteniendo beneficios positivos, mientras la firma menos eficiente no puede igualar

**Paradoja de Bertrand:** Con tan solo dos firmas compitiendo en precios y productos homogéneos, el equilibrio de Nash lleva al mismo precio que en competencia perfecta ( $p = c$ ), eliminando los beneficios de ambas firmas.

Figura 3.5: Funciones de reacción en competencia a la Bertrand con firmas simétricas



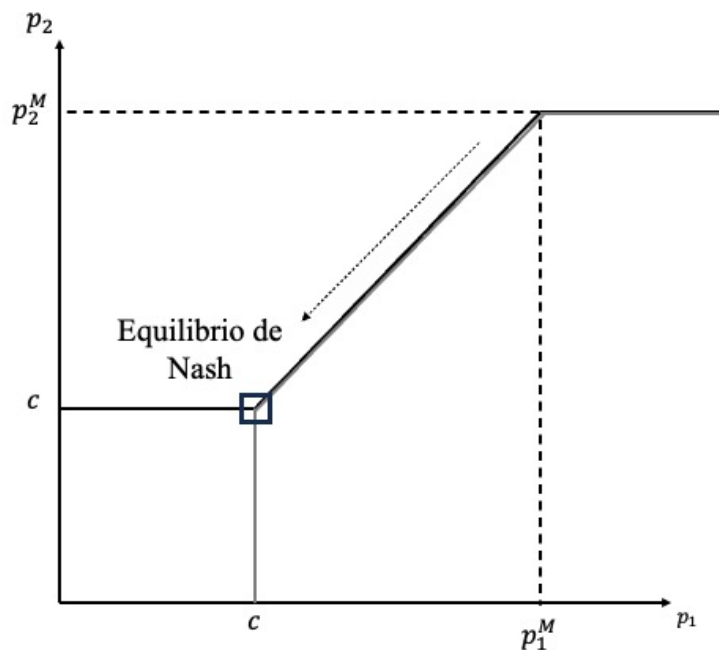
**Antoine Cournot**  
**(1801–1877):**  
 Filósofo y matemático francés, pionero en el uso de funciones matemáticas para describir relaciones económicas como la oferta y la demanda. Fue uno de los primeros en modelar el duopolio con producción como variable estratégica.

ese precio sin incurrir en pérdidas y termina saliendo del mercado. Véase la figura 3.7.

### 3.3.2. Competencia a la Cournot

En el modelo de **Antoine Cournot** las firmas no fijan el precio directamente: este emerge del total producido en el mercado. Cada firma elige cuánto producir, y una mayor producción agregada deprime el precio. Este enfoque aplica bien a mercados con bienes homogéneos como los *commodities*, donde no hay diferenciación de producto y el precio depende esencialmente de la oferta total.

Figura 3.6: Equilibrio de Nash en Bertrand con firmas simétricas



Presentamos el modelo como un duopolio donde cada firma  $i$  produce una cantidad  $q_i$ , y la producción total es:

$$Q = q_1 + q_2 + \dots + q_N = \sum_{i=1}^N q_i \quad (3.3)$$

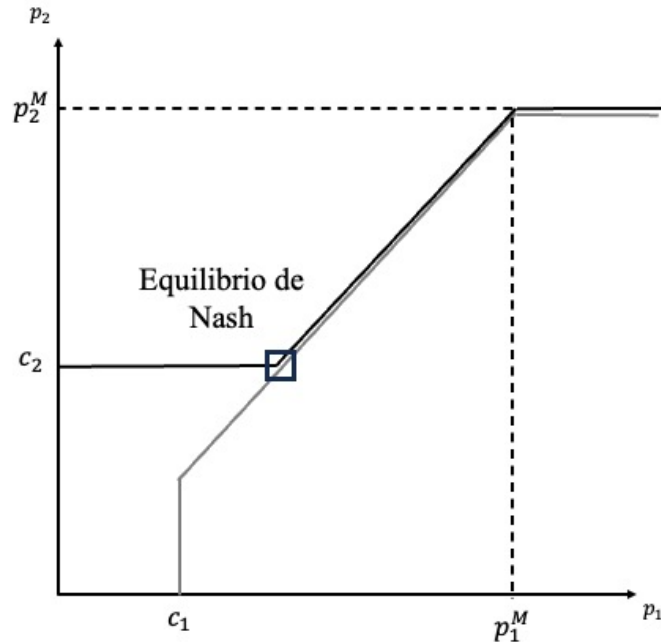
Las firmas son simétricas (igual costo marginal  $c$ ) y enfrentan una demanda lineal inversa:

$$p(Q) = A - Q \quad (3.4)$$

Cada firma maximiza sus beneficios eligiendo  $q_i$ :

$$\max_{q_i} \Pi_i = (p(Q) - c) q_i = (A - Q - c) q_i \quad (3.5)$$

Figura 3.7: Equilibrio de Nash en Bertrand con firmas asimétricas



Como el precio depende de la producción total, al optimizar obtenemos la cantidad óptima de la firma en función de la producción de su rival. Resolviendo para la firma 1:

$$\begin{aligned} \max_{q_1} \quad & \Pi_1 = (A - q_1 - q_2 - c) q_1 \\ \text{CPO:} \quad & \frac{d\Pi_1}{dq_1} = A - 2q_1 - q_2 - c = 0 \end{aligned}$$

Despejando  $q_1$ :

$$q_1^*(q_2) = \frac{A - c - q_2}{2} \quad (3.6)$$

Esta es la función de reacción de la firma 1: su producción óptima decrece ante aumentos en la producción del rival. La intuición es que si el rival produce más, el precio de mercado cae, por lo

que conviene reducir la propia producción para no profundizar esa caída. Por esta razón, las funciones de reacción en Cournot tienen pendiente negativa.<sup>6</sup>

**EQUILIBRIO DE NASH EN COURNOT.** En el equilibrio, cada firma produce la cantidad que es mejor respuesta a la producción de la otra. Para firmas simétricas ( $c_1 = c_2 = c$ ), podemos anticipar que producirán lo mismo:  $q_1 = q_2 = q$ . Sustituyendo en la función de reacción:

$$\begin{aligned} q &= \frac{A - c - q}{2} \\ 2q &= A - c - q \\ q^* &= \frac{A - c}{3} \end{aligned} \quad (3.7)$$

La producción total es  $Q^* = 2q^* = \frac{2(A-c)}{3}$ . El precio de equilibrio es:

$$P^* = A - Q^* = A - \frac{2(A-c)}{3} = \frac{A + 2c}{3} \quad (3.8)$$

Los beneficios individuales son:

$$\Pi_i^* = (P^* - c) q^* = \left( \frac{A + 2c}{3} - c \right) \frac{A - c}{3} = \frac{A - c}{3} \cdot \frac{A - c}{3} = \frac{(A - c)^2}{9} \quad (3.9)$$

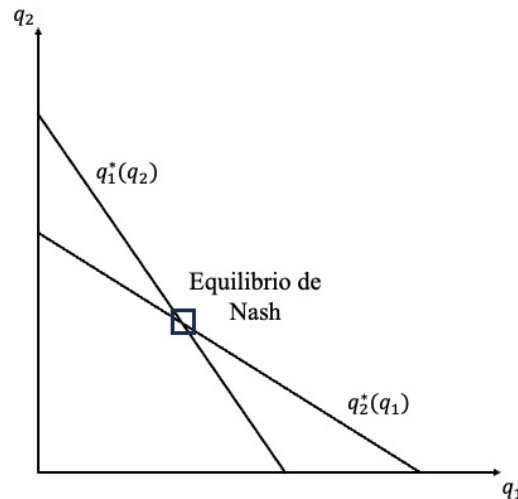
En el caso asimétrico, la firma con menor costo marginal tendrá una función de reacción desplazada hacia afuera: produce más para cualquier nivel de producción del rival. Gráficamente, su función de reacción se desplaza hacia la derecha respecto a la de la firma menos eficiente.

**CASO PARA  $n$  FIRMAS.** Como ejercicio, se recomienda resolver el modelo para  $n$  firmas simétricas. ¿Qué ocurre con el precio y los beneficios a medida que  $n \rightarrow \infty$ ?

---

<sup>6</sup>En Bertrand, en cambio, la función de reacción tiene pendiente positiva en ciertos tramos: si el rival sube su precio, la firma puede subir el suyo hasta cierto punto y aun así capturar demanda.

Figura 3.8: Equilibrio de Nash en Cournot



### Niveles de competencia: Bertrand versus Cournot

Con dos firmas simétricas, Cournot genera beneficios positivos  $\frac{(A-c)^2}{9}$ , mientras que Bertrand lleva los beneficios a cero.

La competencia por precios es más intensa que la competencia por cantidades: bajo las mismas condiciones de mercado, Bertrand produce un resultado más competitivo que Cournot.

Por esto, en un mercado con competencia a la Bertrand las firmas tienen fuertes incentivos a diferenciar su producto, escapando de la paradoja de Bertrand. De aquí emergen modelos de diferenciación horizontal y vertical.<sup>7</sup> También puede relajarse el supuesto de capa-

<sup>7</sup>En diferenciación horizontal, los resultados pueden variar entre mínima diferenciación (tipo Bertrand) y máxima diferenciación, esta última permitiendo obtener beneficios positivos incluso compitiendo en precios. Véase Cremer y Thisse (1991), Dos Santos Ferreira y Thisse (1996) y Hotelling (1929).

cidad ilimitada: si las firmas no pueden satisfacer toda la demanda, el incentivo a bajar precios se atenúa considerablemente.<sup>8</sup>

### 3.3.3. Competencia a la Stackelberg

El modelo de **Heinrich von Stackelberg** extiende el modelo de Cournot introduciendo asimetría temporal: las firmas no deciden simultáneamente, sino por turnos.<sup>9</sup> La firma que mueve primero tiene la *ventaja del primer movimiento* (*first-mover advantage*).

Sea la firma 1 la *líder* (decide en  $t = 1$ ) y la firma 2 la *seguidora* (decide en  $t = 2$ , observando  $q_1$ ). Este es un juego secuencial que se resuelve por inducción hacia atrás.

*Paso 1: problema de la seguidora.* En  $t = 2$ , la firma 2 observa  $q_1$  y maximiza sus beneficios. Su función de reacción es idéntica a la de Cournot:

$$q_2^*(q_1) = \frac{A - c - q_1}{2}$$

*Paso 2: problema de la líder.* En  $t = 1$ , la firma 1 anticipa la respuesta de la seguidora y maximiza sus beneficios incorporando  $q_2^*(q_1)$

**Heinrich von Stackelberg (1905–1946):**

*Economista alemán nacido en Rusia, con ascendencia alemana. Realizó importantes contribuciones a la teoría de oligopolios y a los juegos secuenciales.*

<sup>8</sup>Con restricciones de capacidad, aunque una firma baje el precio hasta su costo marginal, no podría atender toda la demanda adicional que ello generaría. La competencia se modera significativamente.

<sup>9</sup>Aunque el modelo de Stackelberg se presenta habitualmente como competencia en cantidades, existen extensiones al caso de competencia en precios. Véase Meng y Zeng (2013).

como restricción:

$$\begin{aligned}
 \max_{q_1} \quad \Pi_1 &= (A - q_1 - q_2^*(q_1) - c) q_1 \\
 &= \left( A - q_1 - \frac{A - c - q_1}{2} - c \right) q_1 \\
 &= \left( \frac{A - c - q_1}{2} \right) q_1 \\
 \text{CPO: } \frac{d\Pi_1}{dq_1} &= \frac{A - c}{2} - q_1 = 0 \\
 q_1^* &= \frac{A - c}{2}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo en la función de reacción de la seguidora:

$$q_2^* = \frac{A - c - \frac{A - c}{2}}{2} = \frac{A - c}{4}$$

La producción total es  $Q^* = \frac{A - c}{2} + \frac{A - c}{4} = \frac{3(A - c)}{4}$ , el precio de equilibrio es  $P^* = \frac{A + 3c}{4}$  y los beneficios de cada firma son:

$$\Pi_1^* = \frac{(A - c)^2}{8}, \quad \Pi_2^* = \frac{(A - c)^2}{16}$$

Comparando con Cournot ( $\Pi^C = \frac{(A - c)^2}{9}$ ): la firma líder obtiene mayores beneficios que en Cournot, mientras que la seguidora obtiene menores. La líder se compromete a producir una cantidad mayor en el primer período, lo que limita el espacio de producción rentable para la seguidora.

### 3.4. Equilibrios cooperativos: acuerdos colusivos

Cuando las firmas compiten en los modelos anteriores, llegan a equilibrios no cooperativos: al igual que en el dilema del prisionero,

### 3.4. EQUILIBRIOS COOPERATIVOS: ACUERDOS COLUSIVOS<sup>81</sup>

todos estarían mejor si cooperaran, pero las funciones de reacción individuales llevan a resultados subóptimos desde el punto de vista conjunto. Los juegos iterados con horizonte infinito ofrecen una vía para sostener equilibrios cooperativos bajo ciertas condiciones. Esta sección estudia la colusión: cuándo es posible y qué factores la facilitan o dificultan.

En la colusión, las firmas se comprometen a colaborar —por ejemplo, fijando el precio monopólico, restringiendo cantidades, o repartiéndose territorios— con el objetivo de aumentar los beneficios conjuntos. La comprensión de los factores que facilitan la colusión es fundamental para las instituciones de defensa de la competencia, ya que los acuerdos colusivos generan daños significativos al bienestar social.

#### 3.4.1. Acuerdos cooperativos en juegos iterados

La teoría de juegos modela las decisiones de las firmas a lo largo del tiempo mediante **juegos iterados**, donde en cada período las firmas pueden cooperar o desviarse del acuerdo. Se adopta la **estrategia gatillo**: si alguna firma se desvía del acuerdo, las demás responden compitiendo para siempre, eliminando los beneficios de la cooperación futura.

La posibilidad de colusión depende de si el valor presente de cooperar supera el beneficio de desviarse. Un resultado fundamental es el siguiente:

- *Horizonte finito ( $T$  períodos)*: por inducción hacia atrás, en el último período  $T$  ninguna firma coopera (no hay castigo futuro). Esto induce no cooperación en  $T - 1$ , y así sucesivamente. Nunca existe un equilibrio cooperativo bajo horizonte finito.
- *Horizonte infinito*: el problema del último período no existe. Bajo ciertas condiciones sobre la paciencia de las firmas, es

*Juegos iterados:*  
Juegos en los que la interacción se repite durante múltiples períodos. Los jugadores pueden condicionar sus estrategias a la historia del juego.

*Estrategia gatillo:*  
Estrategia en la que un jugador coopera mientras los rivales cooperen, y pasa a competir de manera permanente en cuanto detecta una desviación.

posible sostener un equilibrio cooperativo.

**Teorema de Folk:**  
*Establece que en un juego iterado de horizonte infinito, si los jugadores son suficientemente pacientes, cualquier resultado factible y que domine el castigo puede sostenerse como equilibrio perfecto en subjuegos.*

Este resultado es el contenido del **Teorema de Folk**:<sup>10</sup> si los jugadores son suficientemente pacientes e interactúan un número infinito de veces, pueden sostener un equilibrio cooperativo.

Modelemos el problema. Cada período las firmas pueden cooperar o desviarse. Definimos:

- $\pi^C$ : beneficio por período bajo el acuerdo colusivo.
- $\pi^D$ : beneficio en el período de desvío (maximizando contra la estrategia cooperativa del rival).
- $\pi^G$ : beneficio por período bajo la fase de castigo (competencia normal).
- $\delta \in [0, 1)$ : factor de descuento que pondera los beneficios futuros.

Se cumple que  $\pi^D > \pi^C > \pi^G$  (desviarse en un período es tentador, pero provoca el castigo permanente).

### Condición de colusión en Bertrand

En un duopolio Bertrand con firmas simétricas, el castigo equivale a competencia perfecta:  $\pi^G = 0$ . El precio colusivo es el monopolístico, por lo que  $\pi^C = \frac{\pi^M}{2}$ . Al desviarse, la firma captura todo el mercado con un precio  $p^M - \varepsilon$ , obteniendo  $\pi^D \approx \pi^M$ .

El valor presente de desviarse (en  $t = 0$ ) es:

$$V^D = \pi^M + \underbrace{\frac{\delta}{1 - \delta} \cdot 0}_{\text{castigo}} = \pi^M \quad (3.10)$$

<sup>10</sup>Se denomina "de tradición oral" (*folk*) porque fue un resultado ampliamente utilizado antes de tener una demostración formal atribuida a un autor específico.

### 3.4. EQUILIBRIOS COOPERATIVOS: ACUERDOS COLUSIVOS<sup>83</sup>

El valor presente de cooperar indefinidamente es:

$$V^C = \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t \frac{\pi^M}{2} = \frac{1}{1-\delta} \cdot \frac{\pi^M}{2} \quad (3.11)$$

La colusión se mantiene si  $V^C \geq V^D$ :

$$\frac{\pi^M}{2(1-\delta)} \geq \pi^M \implies \delta \geq \frac{1}{2}$$

Con  $\delta \geq \frac{1}{2}$ , el acuerdo colusivo es sostenible. La interpretación es intuitiva: si las firmas valoran suficientemente el futuro (son pacientes), los beneficios de cooperar a largo plazo superan el beneficio de desviarse en un período.

#### Condición general del Teorema de Folk

En el caso general, la condición de sostenibilidad del acuerdo puede escribirse como:

$$\underbrace{\frac{\delta}{1-\delta}(\pi^C - \pi^G)}_{\text{beneficio futuro de cooperar}} \geq \underbrace{\pi^D - \pi^C}_{\text{ganancia inmediata del desvío}} \quad (3.12)$$

El lado izquierdo es el valor presente de los beneficios adicionales de cooperar (versus recibir el castigo) desde el período siguiente en adelante. El lado derecho es la ganancia de desviarse en el período actual. La colusión es sostenible cuando los beneficios futuros de mantener el acuerdo superan la tentación inmediata del desvío.

Despejando  $\delta$ , obtenemos el factor de descuento mínimo que garantiza la colusión:<sup>11</sup>

$$\delta \geq \frac{\pi^D - \pi^C}{\pi^D - \pi^G} \quad (3.13)$$

---

<sup>11</sup>Se recomienda derivar esta expresión desde la condición (3.12) antes de aplicarla directamente, para no perder la intuición económica del resultado.

Cuanto mayor sea la diferencia entre  $\pi^D$  y  $\pi^C$  (mayor la tentación de desviarse) o menor la diferencia entre  $\pi^C$  y  $\pi^G$  (menor el beneficio de cooperar versus el castigo), mayor debe ser la paciencia de las firmas para que el acuerdo sea sostenible.

### 3.4.2. Factores que facilitan o dificultan la colusión

Dados los parámetros del mercado, ciertos factores estructurales hacen más o menos sostenible el acuerdo colusivo, independientemente del nivel del factor de descuento.

**NÚMERO DE FIRMAS.** A mayor número de firmas, más difícil es mantener el acuerdo colusivo. Con  $N$  firmas simétricas, el beneficio colusivo por firma es  $\pi^C = \frac{\pi^M}{N}$ , que decrece con  $N$ . El beneficio del desvío sigue siendo aproximadamente  $\pi^D \approx \pi^M$ . Normalizando el castigo a  $\pi^G = 0$ ,<sup>12</sup> la condición (3.13) entrega el factor de descuento mínimo necesario:

$$\bar{\delta} = \frac{\pi^M - \frac{\pi^M}{N}}{\pi^M - 0} = 1 - \frac{1}{N}$$

Este umbral *crece* con  $N$  y satisface  $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\delta} = 1$ . Con más firmas, se requiere un factor de descuento más cercano a 1 para sostener el acuerdo: la colusión se vuelve progresivamente más difícil a medida que el mercado tiene más participantes. La intuición es que con más firmas el beneficio de cooperar por cada una es menor, mientras que la tentación de desviarse y capturar el mercado completo se mantiene.

**SEVERIDAD DE LA FASE DE CASTIGO.** Mientras más duro sea el castigo que sigue a una desviación, más fácil es mantener el acuerdo. Un castigo severo implica un  $\pi^G$  bajo, lo que eleva el costo de romper la colusión y reduce el umbral  $\bar{\delta}$  necesario. Por esto, la colusión es más

---

<sup>12</sup>Esta normalización no es estrictamente correcta en Cournot salvo cuando  $N \rightarrow \infty$ , pero simplifica la ilustración del argumento.

### 3.4. EQUILIBRIOS COOPERATIVOS: ACUERDOS COLUSIVOS 85

fácil de sostener bajo competencia a la Bertrand (donde el castigo es  $\pi^G = 0$ , es decir, beneficios nulos) que bajo Cournot (donde el castigo genera beneficios positivos). Dentro del modelo de Cournot, un mayor número de firmas también intensifica la fase de castigo, conectando este factor con el anterior.

ASIMETRÍA ENTRE FIRMAS. Cuando las firmas difieren en eficiencia, el acuerdo colusivo es más difícil de sostener para la firma más eficiente. Esta firma, al tener un costo marginal menor, obtiene beneficios más altos incluso en la fase de castigo (mayor  $\pi^G$ ). Como consecuencia, el costo de ser castigada es menor para ella, lo que reduce su incentivo a mantener el acuerdo: requiere un factor de descuento más alto que la firma menos eficiente para que la colusión sea racional. En la práctica, esto puede generar tensiones internas en los acuerdos entre firmas de distinta eficiencia.

## Ejercicios

### Competencias

Considere el mercado de un producto con demanda inversa  $p = a - bq$ , donde todas las empresas son idénticas con costo marginal igual a cero (el costo fijo es irrelevante para las decisiones de producción). Derive la producción de equilibrio, el precio, las utilidades empresariales totales, las utilidades por empresa y la pérdida social en cada uno de los siguientes casos:

- a. Competencia perfecta.
- b. Monopolio.
- c. Duopolio Cournot.
- d. Duopolio Bertrand.
- e. Duopolio Stackelberg.
- f. Cartel (colusión perfecta).
- g. Compare los resultados anteriores: ¿en qué se diferencia el equilibrio del cartel del resultado de competencia perfecta y del monopolio? ¿Por qué el cartel no es sostenible como equilibrio de Nash en un juego estático, pero sí podría serlo en un juego repetido de horizonte infinito?

### Equilibrios estratégicos de mercados

Suponga un duopolio que enfrenta una demanda de mercado  $P = A - bQ$ , donde  $Q = q_L + q_S$  es la producción total (líder y seguidora respectivamente). Ambas firmas tienen el mismo costo marginal constante  $c$ .

### 3.4. EQUILIBRIOS COOPERATIVOS: ACUERDOS COLUSIVOS<sup>87</sup>

- a. Suponga que una de las firmas puede elegir su cantidad de producción antes que la otra, de manera irreversible. ¿Cuál es el equilibrio de este mercado? Explique el procedimiento de resolución por inducción hacia atrás y grafique el resultado.
- b. ¿Es eficiente la asignación del apartado anterior? Grafique y cuantifique la pérdida social respecto al óptimo de bienestar social.
- c. Suponga ahora que ambas firmas compiten en cantidades de manera simultánea en un juego repetido de horizonte infinito. Obtenga las condiciones bajo las cuales ambas firmas pueden coludirse en un equilibrio perfecto en subjuegos sostenido por la estrategia gatillo. Interprete sus resultados en términos del factor de descuento mínimo necesario.

### **Bertrand con costos asimétricos**

Considere un duopolio en competencia de precios con demanda inversa  $P(Q) = 10 - 2Q$ . La firma 1 tiene costo marginal  $c_1 = 1$  y la firma 2 tiene costo marginal  $c_2 = 2$ .

- a. Encuentre el equilibrio de Nash del juego estático. ¿Contradice este resultado la paradoja de Bertrand? Justifique.
- b. Calcule los beneficios de cada firma en el equilibrio anterior y los beneficios bajo colusión, asumiendo que se dividen el mercado equitativamente.
- c. Calcule los beneficios que obtendría cada firma si se desvía unilateralmente del acuerdo colusivo.
- d. Bajo estrategia gatillo, determine si es posible sostener la colusión en el juego repetido. ¿Cuál de las dos firmas debe ser más paciente? Justifique en términos económicos.

- e. Suponga ahora que el monitoreo del precio del rival es imperfecto: la desviación se detecta con un período de rezago. Aplique la estrategia gatillo bajo este supuesto y determine si la colusión sigue siendo sostenible. ¿Es más fácil o más difícil que en el ítem anterior? ¿Por qué?
- f. Volviendo al escenario del ítem (d), suponga que el factor de descuento de la firma 1 es  $\delta = 0,7$ . Determine qué fracción del mercado debe asignarse a la firma 1 para que acepte participar en el acuerdo colusivo.

## Referencias

- Allen, B., & Hellwig, M. (1986). Price-setting firms and the oligopolistic foundations of perfect competition. *The American Economic Review*, 76(2), 387-392.
- Cremer, H., & Thisse, J.-F. (1991). Location Models of Horizontal Differentiation: A Special Case of Vertical Differentiation Models. *The Journal of Industrial Economics*, 39(4), 383-390. Consultado el 19 de octubre de 2024, desde <http://www.jstor.org/stable/2098438>
- Dixon, H. D. (1992). The competitive outcome as the equilibrium in an Edgeworthian price-quantity model. *The Economic Journal*, 102(411), 301-309.
- Dos Santos Ferreira, R., & Thisse, J.-F. (1996). Horizontal and vertical differentiation: The Launhardt model. *International Journal of Industrial Organization*, 14(4), 485-506. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-7187\(95\)00486-6](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0167-7187(95)00486-6)
- Fischer, R. (2024). *Curso de Organización Industrial (Apunte)*.
- Gibbons, R. (1992). *Un Primer Curso de Teoría de Juegos*.
- González, A. (2020). *Apuntes de Organización Industrial*.
- González, A., Sepúlveda, F., & Hojman, D. (2014). *Teoría de Juegos y Aplicaciones*.

- Hotelling, H. (1929). Stability in Competition. *The Economic Journal*, 39(153), 41-57. Consultado el 19 de octubre de 2024, desde <http://www.jstor.org/stable/2224214>
- Mas Collé, A., & Whinston, M. (1995). *Microeconomic Theory*.
- Meng, F.-L., & Zeng, X.-J. (2013). A Stackelberg game-theoretic approach to optimal real-time pricing for the smart grid. *Soft Computing*, 17, 2365-2380.
- Samuelson, P., & NordHause, W. (1991). Economía. Editorial Mac Graw Hill. España.
- Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach*. WW Norton & Company.



---

---

## CAPÍTULO 4

---

# EL PROBLEMA DE LA DELEGACIÓN Y LA IGNORANCIA

### 4.1. Problemas de agencia

#### 4.1.1. La teoría de agencia y el problema de delegación

La teoría de agencia, también llamada teoría de contratos, estudia las interacciones entre agentes que se relacionan de manera contractual: una parte delega una responsabilidad a otra. La complejidad de los contratos surge de los incentivos contrapuestos entre quien formula el contrato (el *principal*) y quien recibe la delegación

(el agente).

El solo hecho de que un agente acepte un contrato ya impone una restricción al principal. Una segunda dimensión del problema es diseñar el contrato de tal manera que el agente se comporte de manera deseable una vez aceptado. Estas dos condiciones generan un costo inevitable de la delegación: asegurar que el agente tome el contrato puede ir en contra de asegurar que se esfuerce adecuadamente, y viceversa.

**Asimetría de información:**

*Situación en que una parte de la interacción posee información relevante que la otra no tiene.*

Estos costos se acentúan cuando existe **asimetría de información**: una falla de mercado que, en el contexto de los contratos, puede generar grandes ineficiencias tanto en los mercados privados como en el diseño de políticas públicas.

### 4.1.2. Formalización de los contratos

En el problema de agencia, el *principal* diseña un contrato (o un menú de contratos) para el *agente*. Todo contrato puede caracterizarse por dos componentes: el resultado  $x$  y el pago al agente  $\omega(x)$ .

El resultado depende del esfuerzo del agente ( $e$ ) y de condiciones aleatorias de la naturaleza ( $\theta$ ), fuera del control de ambas partes. Un problema central es que el principal no puede distinguir si un resultado es bueno o malo por el esfuerzo del agente o por factores de suerte: el agente puede esforzarse mucho y obtener un mal resultado, o esforzarse poco y tener suerte. Esto hace que el diseño del contrato sea no trivial.

**Condición de participación:**

*Condición que garantiza que el agente obtenga al menos su utilidad de reserva, incentivando la aceptación del contrato.*

Al formular el contrato, el principal debe satisfacer dos condiciones:

La **condición de participación** exige que el contrato le ofrezca al agente al menos su *utilidad de reserva*  $\bar{u}$ , es decir, la utilidad que obtendría sin aceptar ningún contrato. Sin esta condición, el agente simplemente rechaza el contrato.

La **condición de incentivos** exige que, una vez aceptado el contrato, el agente elija el nivel de esfuerzo óptimo desde el punto de vista del principal. El agente decide libremente su esfuerzo dentro de las reglas del contrato, por lo que el diseño debe hacer que el esfuerzo deseado sea también el esfuerzo que el agente querría ejercer.

**Condición de incentivos:** Condición que garantiza que el agente elija el nivel de esfuerzo que el principal desea, dado el diseño del contrato.

Ambas condiciones frecuentemente están en tensión. Mecanismos de castigo que incentivan el esfuerzo (condición de incentivos) pueden hacer que el agente rechace el contrato (condición de participación). Un contrato sin ningún mecanismo de incentivo puede ser aceptado fácilmente pero llevar a un esfuerzo insuficiente. En síntesis: la condición de participación se refiere a que el agente tome el contrato; la condición de incentivos se refiere a que el agente se comporte de manera ideal dentro de él.

El problema del principal puede plantearse formalmente como:

$$\begin{aligned} \max_{\omega} \quad & B(x - \omega) \\ \text{s.a.} \quad & U(\omega, e) \geq \bar{u} \quad (\text{participación}) \\ & \hat{e} = \arg \max_e U(\omega, e) \quad (\text{incentivos}) \end{aligned}$$

donde  $U(\omega, e) = v(\omega) - d(e)$  es la utilidad del agente, que depende positivamente del pago recibido  $v(\omega)$  y negativamente del esfuerzo ejercido  $d(e)$ .

### 4.1.3. Tipos de contratos

De la formalización anterior se pueden distinguir tres tipos de contrato. Las funciones de pago al agente  $\omega$  y al principal  $B$  pueden escribirse de manera genérica como:

$$\begin{aligned} \omega &= \alpha + \beta \cdot x(e, \theta) - R \\ B &= (1 - \beta) \cdot x(e, \theta) - \alpha + R \end{aligned}$$

Una manera de diferenciar estos contratos es identificar quién es el

**Beneficiario residual:** Parte que asume el riesgo de la variabilidad de los resultados. Si los resultados mejoran, le va mejor; si empeoran, le va peor.

**beneficiario residual:** quien asume el riesgo de la variabilidad del resultado.

|                     | $\alpha$ | $\beta$ | $R$ | Pago $\omega$ | Pago $x - \omega$ | Ben. Residual |
|---------------------|----------|---------|-----|---------------|-------------------|---------------|
| Asalariado          | +        | 0       | 0   | $\alpha$      | $x - \alpha$      | Principal     |
| Arriendo/Franquicia | 0        | 1       | +   | $x - R$       | $R$               | Agente        |
| Mediería            | 0        | (0, 1)  | 0   | $\beta x$     | $(1 - \beta)x$    | Ambos         |

Cuadro 4.1: Tipos de contratos y beneficiario residual

En el contrato de *asalariado*, el pago  $\alpha$  no depende del resultado ( $\beta = 0$ ): el principal asume toda la variabilidad y es el beneficiario residual. En el *arriendo o franquicia*, el agente paga un monto fijo  $R$  al principal y retiene toda la producción: es el agente quien asume el riesgo. En la *mediería*, el riesgo se comparte entre ambas partes en proporción  $\beta$  y  $1 - \beta$ .

4.1.4. Ineficiencias del problema de delegación

Para entender el costo de la delegación, conviene comenzar con el caso sin problema de agencia: un individuo que produce por sí solo. Su producción depende de su propio esfuerzo  $e$  y de condiciones aleatorias  $\theta$ . Mientras más se esfuerce, los resultados son en promedio mejores pero a tasas decrecientes (rendimiento marginal del esfuerzo positivo y decreciente), lo que genera la función cóncava  $f(e, \theta) = x$  de la figura 4.1.

Las preferencias del individuo se representan como curvas de indiferencia en el espacio  $(e, x)$ . Dado que los resultados son un bien y el esfuerzo es un mal, las curvas de indiferencia son convexas: para mantener la misma utilidad al aumentar el esfuerzo, se requiere un resultado proporcionalmente mayor. El esfuerzo óptimo  $e_1^*$  se da en la tangencia entre la curva de indiferencia y la función de producción.

El problema de agencia surge al delegar este proceso productivo a

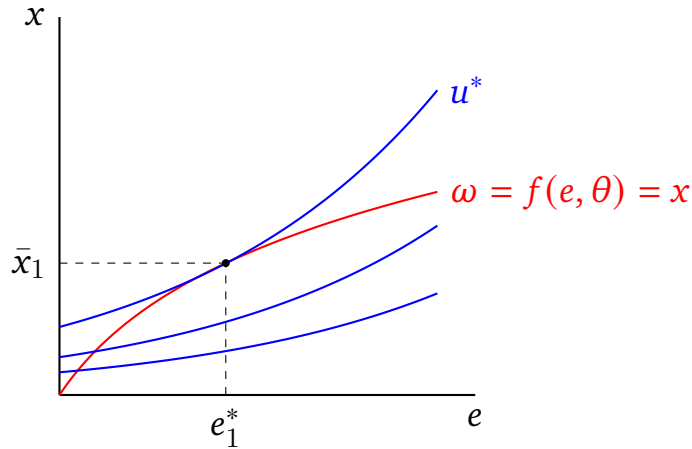


Figura 4.1: Esfuerzo óptimo sin problema de agencia

un agente. Consideremos un contrato de mediería donde el agente recibe una fracción  $\beta \in (0, 1)$  de la producción:  $\omega = \beta x$ . Como se aprecia en la figura 4.2, el pago se reduce para todo nivel de esfuerzo respecto al caso sin delegación.

La condición de participación se verifica gráficamente: si la curva de producción del contrato ( $\beta x$ ) se ubica por encima de la curva de indiferencia de reserva  $\bar{u}$ , el agente está mejor tomando el contrato que rechazándolo.

Una vez aceptado el contrato, el agente elige el esfuerzo que maximiza su propia utilidad, que es  $e_2^*$  en la figura: la tangencia entre su curva de indiferencia y la función de producción bajo el contrato. Este esfuerzo es menor que el que hubiera ejercido el principal por sí solo ( $e_2^* < e_1^*$ ): este es el costo fundamental de la delegación.

La intuición es clara: bajo mediería, el agente recibe solo una fracción  $\beta$  del rendimiento de su esfuerzo, por lo que el rendimiento marginal privado del esfuerzo es menor que el social. Un  $\beta$  mayor induce mayor esfuerzo, pero reduce el pago que retiene el principal. El arte de escribir contratos consiste en minimizar este costo de delegación, aunque nunca es posible eliminarlo completamente.

En lo que sigue se estudian dos fenómenos específicos de los proble-

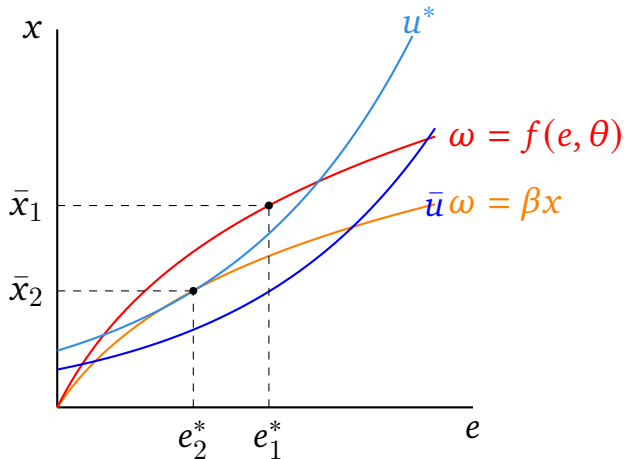


Figura 4.2: Ineficiencias del conflicto entre condición de participación y de incentivos

mas de agencia, que se distinguen por el momento en que opera la asimetría de información: la *selección adversa* ocurre antes de firmar el contrato, y el *riesgo moral* ocurre después.

## 4.2. Riesgo moral

**Riesgo moral:**  
Cambio de comportamiento que ocurre ex-post a la firma de un contrato, cuando una parte reduce su esfuerzo o cuidado porque los costos de sus acciones recaen sobre la otra, gracias a la garantía ofrecida por el contrato.

El **riesgo moral** es el cambio de comportamiento que se produce después de firmar un contrato, motivado por la reducción del costo marginal privado de las acciones del agente. El sector con los ejemplos más ilustrativos es el de los seguros.

Considere un seguro que cubre la totalidad de las abolladuras y rayados de su automóvil. Antes de contratarlo, usted empleaba esfuerzo en conducir con cuidado y estacionarse bien, porque asumía los costos de un daño. Una vez contratado el seguro, los costos de un daño son internalizados completamente por la aseguradora: un agente racional reducirá su esfuerzo de cuidado, pues el costo marginal privado de un descuido ha caído a cero. Esto se manifiesta en conducir más rápido y estacionarse con menos cuidado, lo que ele-

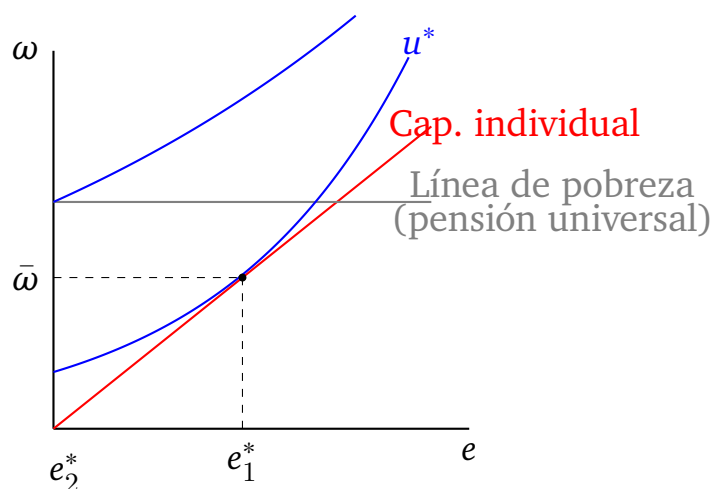


Figura 4.3: Riesgo moral en sistemas de pensiones

va los costos esperados de la aseguradora por encima de lo previsto al fijar la prima.

Las aseguradoras anticipan este problema e introducen mecanismos para mitigarlo. El más frecuente es el *deducible*: ante un siniestro, el costo se reparte entre aseguradora y asegurado. Al internalizar parte del costo, el asegurado mantiene incentivos a ejercer esfuerzo de cuidado.

El riesgo moral tiene también importantes implicancias en política pública. Considere un sistema de pensiones de capitalización individual pura: la pensión es una función creciente del ahorro (esfuerzo) del individuo, como se ilustra en la figura 4.3. El individuo elige su ahorro óptimo  $e_1^*$  en la tangencia entre su curva de indiferencia y la función de capitalización.

Suponga que la pensión resultante cae por debajo de la línea de pobreza. El gobierno responde implementando una pensión garantizada universal justo en esa línea. Esta garantía genera riesgo moral: el individuo ya no necesita ahorrar para evitar la pobreza, pues el Estado lo garantiza independientemente de su esfuerzo. El esfuerzo óptimo cae a  $e_2^* = 0$ , encareciendo considerablemente la política. Por esto es crucial tratar el diseño de las políticas públicas como

problemas de agencia: los incentivos que generan pueden alterar radicalmente el comportamiento de los individuos.

## 4.3. Selección adversa

### 4.3.1. El modelo de selección adversa

La **selección adversa** es una consecuencia de la asimetría de información que opera *ex-ante* a la interacción contractual, es decir, antes de que se firme el contrato.

En muchos modelos económicos se asume información perfecta: completa y simétrica. Al levantar este supuesto surgen dos grandes familias de problemas. El **problema de acción escondida** ocurre cuando el principal no puede observar el esfuerzo del agente y, dado que el resultado depende también del azar, no puede inferir si un resultado fue consecuencia del esfuerzo o de la suerte. El **problema de información escondida**, en cambio, surge cuando el agente posee información relevante que el principal no tiene: por ejemplo, su nivel de productividad o la calidad del bien que transa.

El modelo de los limones de Akerlof es el ejemplo canónico de información escondida: los vendedores conocen la calidad del bien pero los compradores no. Esta asimetría puede llevar al **colapso del mercado**, es decir, a que el mercado deje de funcionar por la salida progresiva de los vendedores de mayor calidad.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Nótese que colapso de mercado.<sup>en</sup> selección adversa tiene un significado distinto al de "vaciamiento de mercado.<sup>en</sup> equilibrio general. En este último, el vaciamiento indica que toda la oferta encuentra su demanda (equilibrio). En selección adversa, el colapso indica que el mercado deja de existir.

### 4.3.2. Colapso de mercados

Presentamos el fenómeno en el contexto clásico del mercado de autos usados. Los autos de buena calidad se denominan *cerezas* (*cherries*) y los de mala calidad se denominan *limones* (*lemons*).

Definamos la calidad del auto  $i$  como un parámetro  $\kappa_i \in [0, 1]$ , distribuido uniformemente en ese intervalo. Compradores y vendedores son neutrales al riesgo. Las utilidades de comprador y vendedor son:

$$\begin{aligned} u_i^c &= c\kappa_i - p_i \\ u_i^v &= p_i - v\kappa_i \end{aligned}$$

donde  $p_i$  es el precio del auto,  $c\kappa_i$  es la valoración del comprador y  $v\kappa_i$  es la valoración del vendedor, con  $c > v > 0$ .

*Bajo información perfecta:* la calidad  $\kappa_i$  es conocida por ambas partes. Dado que  $c > v$ , la condición de transacción  $c\kappa_i \geq v\kappa_i$  se cumple para todo  $\kappa_i > 0$ : todos los autos se venden al precio de equilibrio  $p_i = v\kappa_i$  (o cualquier precio entre  $v\kappa_i$  y  $c\kappa_i$ ). El mercado funciona perfectamente.

*Bajo información asimétrica:* los vendedores conocen  $\kappa_i$  pero los compradores no. El comprador no puede distinguir la calidad del auto que está comprando, por lo que está dispuesto a pagar únicamente el valor esperado de la calidad de los autos disponibles en el mercado.

Para un precio de mercado  $p$ , solo venden los autos cuyo vendedor acepte ese precio:  $v\kappa_i \leq p$ , es decir,  $\kappa_i \leq p/v$ . Los autos de mayor calidad ( $\kappa_i > p/v$ ) salen del mercado. El comprador anticipa esto y actualiza su estimación de la calidad esperada al promedio de los autos que efectivamente se ofrecen:

$$E[\kappa_i \mid \kappa_i \leq p/v] = \frac{p}{2v}$$

La máxima disposición a pagar del comprador es entonces  $c \cdot \frac{p}{2v}$ .

Para que haya transacción se necesita que esta disposición a pagar sea al menos igual al precio:

$$c \cdot \frac{p}{2v} \geq p \implies c \geq 2v$$

Bajo información perfecta la condición era simplemente  $c > v$ . Bajo información asimétrica, la condición se vuelve  $c \geq 2v$ , que es estrictamente más restrictiva. Si  $v < c < 2v$  —un escenario perfectamente posible— el mercado *no* puede sostenerse, aunque bajo información perfecta todos los autos se transarían eficientemente.



Figura 4.4: Reducción del mercado por asimetría de información

La dinámica temporal de este resultado genera el **colapso de mercados de Akerlof**: en cada período, los vendedores de mayor calidad salen del mercado, lo que reduce la calidad esperada de los autos disponibles, lo que lleva a que los compradores bajen su disposición a pagar, lo que expulsa a otro tramo de vendedores de mayor calidad, y así sucesivamente. En el límite, el mercado colapsa: deja de existir.

### 4.3.3. Aplicaciones en mercados relevantes

El colapso de mercados por selección adversa aparece en múltiples contextos.

En el mercado de *seguros de salud*, la información escondida es la probabilidad de cada individuo de requerir atención médica. La aseguradora fija una prima basada en el riesgo promedio del mercado. Las personas de bajo riesgo encuentran la prima demasiado cara en relación a su probabilidad esperada de uso, y salen del mercado.

Esto eleva el riesgo promedio y la prima, expulsando al siguiente tramo de menor riesgo. En Chile, durante la década de 1990 se observó una dinámica similar en el mercado de ISAPRES: los individuos jóvenes y saludables encontraban más conveniente mantenerse en el sistema público, dejando a las aseguradoras privadas con una cartera progresivamente más riesgosa.

En el mercado de *educación superior*, la información escondida era la calidad real de las instituciones. Los estudiantes no podían distinguir ex-ante instituciones de buena y mala calidad, lo que llevó a que muchos se matricularan en programas que no rendían en empleabilidad e ingresos como esperaban. Distintos mecanismos han intentado reducir esta asimetría: las acreditaciones institucionales, que actúan como señales de calidad, y la disponibilidad pública de datos de empleabilidad y salarios por institución y carrera.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>En [mifuturo.cl](http://mifuturo.cl) se pueden encontrar estos datos, con el objetivo de que los estudiantes tomen decisiones con mayor información.

## Ejercicios

### Colapso de mercados

En un mercado de autos existen compradores y vendedores. Hay tres tipos de vendedores, indexados por  $i \in \{1, 2, 3\}$ , con las siguientes valoraciones y cantidades:

$$\theta_{v_1} = 50, \quad \theta_{v_2} = 100, \quad \theta_{v_3} = 150$$

$$(n_1, n_2, n_3) = (800, 300, 100), \quad n_m = n_1 + n_2 + n_3 = 1200$$

Los compradores valoran cada tipo de auto en  $\theta_{c_i} = 1,5 \cdot \theta_{v_i}$ . Solo los vendedores conocen el tipo de su auto; los compradores solo conocen la distribución de tipos en el mercado. Asuma neutralidad al riesgo y que el precio de equilibrio iguala la valoración del comprador (sin excedente del consumidor).

1. Si los valores de los autos son observables por ambas partes, ¿cuáles son los precios de equilibrio para cada tipo de auto?
2. Calcule el excedente social bajo información perfecta.
3. Suponga ahora que los valores son información privada de los vendedores. Los compradores conocen únicamente la distribución de tipos descrita en el enunciado. Encuentre el precio de mercado bajo información asimétrica y determine qué vendedores participan en el mercado.
4. En el período siguiente, los vendedores de tipo 3 han salido del mercado permanentemente. El mercado ahora tiene  $(n_1, n_2) = (800, 300)$  con  $n_m = 1100$ . ¿Qué ocurrirá con la calidad esperada de los autos transados en períodos subsiguientes? ¿A qué fenómeno y a qué autor corresponde esta dinámica?

5. Volviendo al mercado con los tres tipos de vendedores. Suponga que un mecánico experto puede certificar el valor exacto de un auto a un costo de 30 por vendedor. La certificación es voluntaria. ¿Qué tipo(s) de vendedor(es) optarían por certificar su auto? Calcule el excedente social resultante y compárelo con los casos anteriores.

## Referencias

- Akerlof, G. A. (1970). The Market for "Lemons": Quality Uncertainty and the Market Mechanism. *The Quarterly Journal of Economics*, 84(3), 488-500. Consultado el 28 de octubre de 2024, desde <http://www.jstor.org/stable/1879431>
- Varian, H. R. (2014). *Intermediate microeconomics with calculus: a modern approach*. WW Norton & Company.



---

---

# APÉNDICE A

---

## LA ECONOMÍA DESCENTRALIZADA

### A.1. Optimización de una Cobb-Douglas

Esta sección tiene como objetivo guiar el proceso de optimización de una función objetivo tipo Cobb-Douglas sujeta a una restricción presupuestaria. Es una guía práctica orientada al cálculo, no a la formalización matemática.

Considere un individuo con función de utilidad:

$$u(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1$$

donde  $\beta = 1 - \alpha$ . El individuo maximiza su utilidad eligiendo las cantidades a consumir de cada bien, sujeto a que el gasto no supere

su riqueza  $r$ :

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & x^\alpha y^\beta \\ \text{s.a.} \quad & p_x x + p_y y = r \end{aligned}$$

Para resolver este problema con restricciones usamos el método de multiplicadores de Lagrange. La convención estándar es escribir la restricción de forma que el multiplicador  $\lambda$  sea positivo:

$$\mathcal{L} = x^\alpha y^\beta + \lambda (r - p_x x - p_y y)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \alpha x^{\alpha-1} y^\beta - \lambda p_x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \beta x^\alpha y^{\beta-1} - \lambda p_y = 0 \end{aligned}$$

Igualando  $\lambda$  en ambas ecuaciones:

$$\lambda = \frac{\alpha x^{\alpha-1} y^\beta}{p_x} = \frac{\beta x^\alpha y^{\beta-1}}{p_y} \implies p_y \alpha y = p_x \beta x \quad (\text{A.1})$$

De (A.1) despejamos  $y = \frac{p_x \beta x}{p_y \alpha}$  y sustituimos en la restricción presupuestaria:

$$\begin{aligned} p_x x + p_y \cdot \frac{p_x \beta x}{p_y \alpha} &= r \\ p_x x \left( 1 + \frac{\beta}{\alpha} \right) &= r \\ p_x x \cdot \frac{\alpha + \beta}{\alpha} &= r \end{aligned}$$

Despejando obtenemos las demandas marshallianas:

$$x^* = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \cdot \frac{r}{p_x}, \quad y^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \cdot \frac{r}{p_y}$$

Bajo el supuesto  $\alpha + \beta = 1$ , estas se simplifican a  $x^* = \alpha \frac{r}{p_x}$  e  $y^* = \beta \frac{r}{p_y}$ . Como en cualquier demanda, a mayor precio menor cantidad demandada, y a mayor riqueza mayor consumo.

La forma de estas demandas es una propiedad general de las funciones Cobb-Douglas: el gasto óptimo en cada bien es siempre una fracción constante de la riqueza ( $\alpha r$  en  $x$  y  $\beta r$  en  $y$ ), independientemente de los precios. Por esto, no siempre es necesario plantear el lagrangeano; basta recordar esta propiedad.

Por último, es útil recordar que transformar monotónicamente la función objetivo no cambia los argumentos maximizadores. Por tanto, la siguiente función tiene exactamente las mismas demandas marshallianas:

$$v(x, y) = \alpha \ln(x) + \beta \ln(y) \quad \equiv \quad u(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

## A.2. Demostraciones

### Teorema A.2.1. Existencia de equilibrio competitivo

Bajo los supuestos de la sección 1.2.1 y con funciones de demanda continuas (derivadas de preferencias convexas), existe un vector de precios  $p^*$  tal que  $z(p^*) = 0$ .

*Demostración.* Normalizamos los precios al símplex de precios:

$$p'_n = \frac{p_n}{\sum_k p_k}$$

De esta manera los precios quedan acotados a  $[0, 1]$  y se conservan los precios relativos:

$$\frac{p'_i}{p'_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

Definimos el operador de ajuste de precios: dado un vector de precios  $p_0$ , construimos:

$$p_1(p_0) = p_0 + \kappa z(p_0), \quad \kappa > 0$$

De esta manera, si hay exceso de demanda positivo (negativo) en un mercado, el precio sube (baja). Basta demostrar que este operador tiene un punto fijo  $p^*$  tal que  $p^*(p^*) = p^*$ , lo que implicaría  $z(p^*) = 0$ .

**Lemma A.2.2. Teorema del punto fijo de Brouwer**

Si  $f : C \rightarrow C$  es continua y  $C \subset \mathbb{R}^n$  es compacto y convexo, entonces  $\exists x^* : f(x^*) = x^*$ .

Dado que las preferencias son convexas, las demandas individuales son continuas, y por tanto  $z(\cdot)$  es continua. El símplex de precios es compacto y convexo, y el operador  $p_1(\cdot)$  (debidamente renormalizado al símplex) mapea el símplex en sí mismo. Aplicando el teorema del punto fijo:

$$\exists p^* : p^* + \kappa z(p^*) = p^* \implies z(p^*) = 0$$

□

**Teorema A.2.3** (Primer teorema del bienestar). Si  $(X, p)$  es un equilibrio competitivo, entonces  $X$  es una asignación Pareto-óptima.

*Demostración.* Por contradicción. Supongamos que existe una asignación factible  $X'$  que Pareto-domina a  $X$ :  $u_i(X'_i) \geq u_i(X_i)$  para todo  $i$ , con al menos un  $j$  tal que  $u_j(X'_j) > u_j(X_j)$ , y  $\sum_i X'_i \leq \sum_i \omega_i$ .

Para el agente  $j$  con mejora estricta: dado que  $X_j$  maximiza su utilidad sujeto al presupuesto  $p \cdot \omega_j$ , la asignación  $X'_j$  (que le da mayor utilidad) debe ser inasequible, es decir:

$$p \cdot X'_j > p \cdot \omega_j \tag{A.2}$$

Para los demás agentes  $i \neq j$  con  $u_i(X'_i) \geq u_i(X_i)$ : por no saciación local, si  $X'_i$  fuera estrictamente más barato que  $X_i$ , existiría una asignación cercana aún más preferida y asequible, contradiciendo que  $X_i$  es óptima. Por tanto:

$$p \cdot X'_i \geq p \cdot \omega_i \quad (\text{A.3})$$

Sumando (A.2) y (A.3) sobre todos los agentes:

$$p \cdot \sum_i X'_i > p \cdot \sum_i \omega_i$$

Pero la factibilidad de  $X'$  implica  $p \cdot \sum_i X'_i \leq p \cdot \sum_i \omega_i$ : contradicción.  $\square$

**Lemma A.2.4** (Hiperplano separador). Sean  $A$  y  $B$  conjuntos convexos y disjuntos en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces existe un hiperplano que los separa:

$$\exists p, a : \quad pX_1 \geq a \geq pX_2 \quad \forall X_1 \in A, X_2 \in B \quad (\text{A.4})$$

**Teorema A.2.5** (Segundo teorema del bienestar). Si  $X^*$  es una asignación Pareto-óptima en la que cada individuo tiene una cantidad estrictamente positiva de cada bien, y las preferencias son convexas, continuas y monótonas, entonces  $X^*$  puede sostenerse como equilibrio competitivo para la dotación inicial  $\omega_i = X_i^*$ .

*Demostración.* Definimos  $\mathbb{P}_i = \{X_i : X_i \succ_i X_i^*\}$  el conjunto de asignaciones estrictamente preferidas por  $i$  sobre  $X_i^*$ , y  $\mathbb{P} = \sum_i \mathbb{P}_i$  el conjunto de asignaciones agregadas tales que todos los individuos mejorarían simultáneamente.

*Convexidad.* Como las preferencias son convexas, cada  $\mathbb{P}_i$  es convexo. La suma de conjuntos convexos es convexa, por lo que  $\mathbb{P}$  es convexo. El punto  $\omega = \sum_i X_i^*$  es convexo trivialmente (todo punto lo es).

*Disjunción.* Como  $X^*$  es Pareto-óptimo, no existe ninguna reasignación factible que mejore a todos simultáneamente. Por tanto  $\omega \notin \mathbb{P}$ , y los conjuntos  $\{\omega\}$  y  $\mathbb{P}$  son disjuntos.

*Separación.* Aplicando el teorema del hiperplano separador:

$$\exists p : \quad p \cdot z \geq p \cdot \omega, \quad \forall z \in \mathbb{P} \quad (\text{A.5})$$

Este  $p$  es el candidato al vector de precios de equilibrio. Verificamos las condiciones necesarias.

$p \geq 0$ . Sea  $e_i$  el vector unitario en la dirección  $i$ . Por monotonicidad de preferencias,  $\omega + e_i \in \mathbb{P}$  (con una unidad adicional de cualquier bien podemos mejorar a todos). De (A.5):

$$p(\omega + e_i) \geq p\omega \implies p \cdot e_i \geq 0 \implies p \geq 0$$

Si  $X_j \succ_j X_j^*$  entonces  $p \cdot X_j \geq p \cdot X_j^*$ . Construimos para  $\theta > 0$  pequeño:

$$z_j = (1 - \theta)X_j \succ_j X_j^* \quad (\text{por continuidad de preferencias})$$

$$z_i = X_i + \frac{\theta X_j}{n - 1}, \quad i \neq j \quad (\text{mejor por monotonicidad})$$

Entonces  $z \in \mathbb{P}$ . Aplicando (A.5) y simplificando:

$$p \cdot X_j \geq p \cdot X_j^* \quad (\text{A.6})$$

*Desigualdad estricta.* Queremos mostrar que  $X_i \succ_i X_i^* \implies p \cdot X_i > p \cdot X_i^*$ . Por contradicción, supongamos  $p \cdot X_i = p \cdot X_i^*$ . Por continuidad de preferencias,  $\exists \theta \in (0, 1) : \theta X_i \succ_i X_i^*$ . De (A.6):

$$p \cdot \theta X_i \geq p \cdot X_i^*$$

Pero como cada individuo tiene cantidad positiva de cada bien,  $p \cdot X_i^* > 0$ , y:

$$p \cdot \theta X_i = \theta \cdot p \cdot X_i = \theta \cdot p \cdot X_i^* < p \cdot X_i^*$$

contradicción. Por tanto  $p \cdot X_i > p \cdot X_i^* = p \cdot \omega_i$ , lo que confirma que  $X_i^*$  es la demanda óptima para el agente  $i$  al precio  $p$  con dotación  $\omega_i = X_i^*$ .  $\square$

### A.3. EQUILIBRIO GENERAL CON PRODUCCIÓN: EJEMPLO RESUELTO 111

Dos observaciones sobre esta demostración:

- *Convexidad y continuidad son esenciales.* El teorema del hiperplano separador requiere convexidad; la desigualdad estricta requiere continuidad. Estos supuestos no pueden relajarse sin modificar la demostración.
- *La redistribución no debe distorsionar precios.* La dotación inicial se redistribuye a  $\omega_i = X_i^*$  sin alterar el vector de precios  $p$ , lo que requiere que la redistribución sea de tipo suma alzada.

## A.3. Equilibrio general con producción: ejemplo resuelto

Esta sección presenta un ejemplo completo de cómo resolver un modelo de equilibrio general con producción (economía  $2 \times 2 \times 2$ ). Las funciones de utilidad y producción son Cobb-Douglas:

$$U_i(x_i, y_i) = x_i^\alpha y_i^{1-\alpha}, \quad i = A, B$$
$$x(K_x, L_x) = K_x^\beta L_x^{1-\beta}, \quad y(K_y, L_y) = K_y^\beta L_y^{1-\beta}$$

con dotaciones totales  $\bar{K}$  y  $\bar{L}$ .

### Paso 1: Curva de contrato de la producción

La eficiencia productiva requiere igualar las TMST de ambas industrias. Planteamos el problema de maximizar la producción de  $x$  sujeto a mantener fija la producción de  $y$  y a las restricciones de factores:

$$\mathcal{L} = K_x^\beta L_x^{1-\beta} + \lambda_1(y - K_y^\beta L_y^{1-\beta}) + \lambda_2(\bar{K} - K_x - K_y) + \lambda_3(\bar{L} - L_x - L_y)$$

Las condiciones de primer orden dan:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_x} = \beta K_x^{\beta-1} L_x^{1-\beta} - \lambda_2 = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_x} = (1 - \beta) K_x^\beta L_x^{-\beta} - \lambda_3 = 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_y} = \lambda_1 \beta K_y^{\beta-1} L_y^{1-\beta} - \lambda_2 = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_y} = \lambda_1 (1 - \beta) K_y^\beta L_y^{-\beta} - \lambda_3 = 0 \quad (\text{A.10})$$

Dividiendo las CPO para  $K$  y  $L$  de cada bien:

$$TMST^x = \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{L_x}{K_x} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} = \frac{\beta}{1 - \beta} \cdot \frac{L_y}{K_y} = TMST^y$$

La condición de eficiencia  $TMST^x = TMST^y$  implica:

$$\frac{L_x}{K_x} = \frac{L_y}{K_y} \quad (\text{A.11})$$

Como ambos bienes tienen la misma tecnología, la curva de contrato es la diagonal de la caja de Edgeworth de la producción. Usando las restricciones de factores:

$$\frac{L_x}{K_x} = \frac{\bar{L} - L_x}{\bar{K} - K_x} \implies K_x = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x \iff K_y = \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_y \quad (\text{A.12})$$

## Paso 2: Frontera de posibilidades de producción (FPP)

Sustituyendo (A.12) en la función de producción de  $x$ :

$$x = \left( \frac{\bar{K}}{\bar{L}} L_x \right)^\beta L_x^{1-\beta} = \left( \frac{\bar{K}}{\bar{L}} \right)^\beta L_x$$

Despejando:  $L_x^* = \left( \frac{\bar{L}}{\bar{K}} \right)^\beta x = \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} x$ . Por simetría:  $L_y^* = \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} y$ .

### A.3. EQUILIBRIO GENERAL CON PRODUCCIÓN: EJEMPLO RESUELTO 113

Usando la restricción  $L_x^* + L_y^* = \bar{L}$ :

$$\frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta}(x + y) = \bar{L} \implies x + y = \frac{\bar{L} \cdot \bar{K}^\beta}{\bar{L}^\beta} = \bar{K}^\beta \bar{L}^{1-\beta}$$

La FPP es:

$$y = \bar{K}^\beta \bar{L}^{1-\beta} - x \quad (\text{A.13})$$

Esta es una función lineal decreciente con pendiente  $-1$ . La producción máxima total (de ambos bienes combinada) es  $\bar{K}^\beta \bar{L}^{1-\beta}$ , que depende de las dotaciones totales de factores y la tecnología  $\beta$ .

Las asignaciones óptimas de factores son:

$$L_x^* = \frac{\bar{L}^\beta}{\bar{K}^\beta} x, \quad K_x^* = \frac{\bar{K}^{1-\beta}}{\bar{L}^{1-\beta}} x \quad (\text{ídem para } y)$$

### Paso 3: Eficiencia en el consumo y condición de equilibrio

Planteamos el problema de maximizar la utilidad del agente  $A$  sujeto a la utilidad del agente  $B$ , las restricciones de factibilidad y la FPP:

$$\begin{aligned} \max_{x_A, y_A} \quad & x_A^\alpha y_A^{1-\alpha} \\ \text{s.a.} \quad & x_B^\alpha y_B^{1-\alpha} = \bar{U}_B \\ & x_A + x_B = \bar{x} \\ & y_A + y_B = \bar{y} \\ & \bar{x} + \bar{y} = \bar{K}^\beta \bar{L}^{1-\beta} \end{aligned}$$

El lagrangeano es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & x_A^\alpha y_A^{1-\alpha} + \lambda_1 (x_B^\alpha y_B^{1-\alpha} - \bar{U}_B) + \lambda_2 (\bar{x} - x_A - x_B) \\ & + \lambda_3 (\bar{y} - y_A - y_B) + \lambda_4 (\bar{K}^\beta \bar{L}^{1-\beta} - \bar{x} - \bar{y}) \end{aligned}$$

Las CPO respecto a  $x_A$ ,  $y_A$ ,  $x_B$ ,  $y_B$ ,  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  dan:

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{y_A}{x_A} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad (TMS_A)$$

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{y_B}{x_B} = \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \quad (TMS_B)$$

lo que confirma  $TMS_A = TMS_B$  (eficiencia en el consumo). Respecto a  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{x}} = \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \implies \lambda_2 = \lambda_4$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{y}} = \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \implies \lambda_3 = \lambda_4$$

Por tanto  $\lambda_2 = \lambda_3$ , lo que implica  $\frac{\lambda_2}{\lambda_3} = 1$ . Esto significa que en el equilibrio la TMS de ambos agentes es igual a 1, que es precisamente la pendiente (en valor absoluto) de la FPP. Se cumple así la condición de eficiencia global:

$$TMS_A = TMS_B = TRT = 1$$

donde  $TRT = 1$  refleja la pendiente de la FPP lineal obtenida bajo estas preferencias y tecnologías simétricas.

Para ejercitar este tipo de problema puede consultar el siguiente recurso: [video ilustrativo](#).

---

# APÉNDICE B

---

## EL PROBLEMA DEL TIEMPO Y EL RIESGO

### B.1. Random Walk

Incluyendo incertidumbre en un modelo con expectativas racionales podemos obtener distintos resultados dependiendo del tipo de función de utilidad. En esta sección veremos cómo un individuo con utilidad cuadrática (marginal lineal) sigue una trayectoria de consumo tipo *random walk*.

El problema del individuo con consumo futuro incierto es:

$$\begin{aligned} \max_{c_t, c_{t+1}} \quad & u(c_t) + \frac{1}{1+\rho} \mathbb{E}_t\{u(c_{t+1})\} \\ \text{s.a.} \quad & y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} = c_t + \frac{c_{t+1}}{1+r} \end{aligned}$$

Planteamos el lagrangeano:

$$\mathcal{L} = u(c_t) + \frac{1}{1+\rho} \mathbb{E}_t\{u(c_{t+1})\} + \lambda \left( y_t + \frac{y_{t+1}}{1+r} - c_t - \frac{c_{t+1}}{1+r} \right)$$

Las condiciones de primer orden son:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = u'(c_t) - \lambda = 0 \implies u'(c_t) = \lambda \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_{t+1}} = \frac{1}{1+\rho} \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} - \frac{\lambda}{1+r} = 0 \implies \frac{1+r}{1+\rho} \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} = \lambda \quad (\text{B.2})$$

Igualando ambas expresiones para  $\lambda$  obtenemos la **ecuación de Euler del consumo**:

$$u'(c_t) = \frac{1+r}{1+\rho} \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} \quad (\text{B.3})$$

Para derivar el resultado de *random walk* utilizamos una función de utilidad cuadrática:

$$u(c_t) = bc_t - \frac{a}{2} c_t^2, \quad a, b > 0 \quad (\text{B.4})$$

Esta función tiene  $u'' = -a < 0$  (individuo averso al riesgo), pero su utilidad marginal  $u'(c) = b - ac$  es *lineal*. Esta linealidad es la propiedad clave: permite pasar el operador esperanza a través de  $u'$  sin pérdida (la desigualdad de Jensen se cumple con igualdad para funciones lineales). Asumiendo  $r = \rho = 0$  y sustituyendo en la ecuación de Euler:

$$b - ac_t = \mathbb{E}_t\{b - ac_{t+1}\} = b - a \mathbb{E}_t\{c_{t+1}\}$$

Cancelando términos:

$$c_t = \mathbb{E}_t\{c_{t+1}\} \quad (\text{B.5})$$

Según la ecuación (B.5), el consumo en  $t$  es igual al consumo esperado en  $t + 1$ : la trayectoria de consumo es un *random walk*. El consumo permanece constante en expectativa y solo se desvía ante shocks no anticipados.

## B.2. Incertidumbre y ahorro por precaución

El resultado de *random walk* se apoya en la linealidad de la utilidad marginal, que hace que  $\mathbb{E}\{u'(c)\} = u'(\mathbb{E}\{c\})$ . ¿Qué ocurre cuando esto no se cumple?

Para un individuo con utilidad marginal *convexa* ( $u''' > 0$ , condición de **prudencia** en el sentido de Kimball), la desigualdad de Jensen implica:

$$\mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} > u'(\mathbb{E}_t\{c_{t+1}\}) \quad (\text{B.6})$$

Nótese que esto requiere algo más que la sola aversión al riesgo ( $u'' < 0$ ): se necesita que la utilidad marginal sea convexa, lo que formalmente equivale a  $u''' > 0$ . Por ejemplo, la función CRRA  $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma}$  satisface esta condición.

De la ecuación de Euler (B.3) con  $r = \rho = 0$ :

$$u'(c_t) = \mathbb{E}_t\{u'(c_{t+1})\} > u'(\mathbb{E}_t\{c_{t+1}\}) \quad (\text{B.7})$$

Como  $u' > 0$  y  $u'' < 0$  (utilidad marginal positiva y decreciente), la desigualdad  $u'(c_t) > u'(\mathbb{E}_t\{c_{t+1}\})$  implica:

$$c_t < \mathbb{E}_t\{c_{t+1}\} \quad (\text{B.8})$$

El individuo consume *menos* hoy de lo que esperaría consumir mañana: ahorra por precaución. La intuición es que la incertidumbre sobre el consumo futuro incrementa la utilidad marginal esperada, lo que incentiva a posponer consumo como seguro ante posibles caídas del ingreso.

## B.3. Modelo CAPM de consumo

Los retornos financieros están sujetos a incertidumbre. Para un individuo con expectativas racionales que puede consumir hoy o invertir en activos con retorno incierto  $r^i$ , la ecuación de Euler toma

la forma:

$$u'(c_1) = \mathbb{E}_1 \left[ \frac{1+r^i}{1+\rho} u'(c_2) \right] \quad (\text{B.9})$$

Queremos encontrar el diferencial entre el retorno esperado del activo riesgoso y el activo libre de riesgo. Usamos la descomposición  $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) + \text{Cov}(X, Y)$  en (B.9):

$$u'(c_1) = \frac{1}{1+\rho} \left[ \mathbb{E}_1(1+r^i) \cdot \mathbb{E}_1(u'(c_2)) + \text{Cov}(1+r^i, u'(c_2)) \right] \quad (\text{B.10})$$

Despejando  $\mathbb{E}_1(1+r^i)$ :

$$\mathbb{E}_1(1+r^i) = \frac{(1+\rho) u'(c_1) - \text{Cov}(1+r^i, u'(c_2))}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))} \quad (\text{B.11})$$

Para el activo libre de riesgo, el retorno  $r$  es constante y sale de la esperanza:

$$1+r = \frac{(1+\rho) u'(c_1)}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))} \quad (\text{B.12})$$

Restando (B.12) de (B.11):

$$\mathbb{E}_1(r^i) - r = - \frac{\text{Cov}(1+r^i, u'(c_2))}{\mathbb{E}_1(u'(c_2))} \quad (\text{B.13})$$

Esta es la ecuación central del CAPM de consumo: el premio por riesgo de un activo es proporcional a su covarianza con la utilidad marginal del consumo futuro.

La interpretación depende del signo de la covarianza. Dado que  $u'(c_2) > 0$  y  $u''(c_2) < 0$ , la utilidad marginal es alta cuando el consumo es bajo y viceversa:  $u'(c_2)$  covaria negativamente con  $c_2$ .

- Si  $\text{Cov}(1+r^i, u'(c_2)) < 0$ : el activo paga más cuando el consumo futuro es alto (y la utilidad marginal es baja). El activo no sirve como seguro contra los malos tiempos. Para que alguien lo mantenga en su portafolio debe ofrecer un retorno esperado superior al activo libre de riesgo:  $\mathbb{E}_1(r^i) > r$ . Hay premio por riesgo.

- Si  $\text{Cov}(1 + r^i, u'(c_2)) > 0$ : el activo paga más precisamente cuando el consumo es bajo y la utilidad marginal es alta. Actúa como seguro contra las caídas del ingreso. Los agentes están dispuestos a aceptar un retorno esperado inferior al activo libre de riesgo:  $\mathbb{E}_1(r^i) < r$ .