

Licitaciones en Minería Chilena

Subasta de Primer Precio con Firmas Asimétricas

Joaquín Martínez

Facultad de Economía y Negocios, Universidad de Chile

Otoño 2026

Contenidos

Contexto de las licitaciones en minería

Juego Bayesiano Estático para contratistas heterogéneos

Solución numérica de un juego

Extensiones y futuras preguntas de investigación

- Probabilidad de éxito heterogénea

- Subdivisión de proyectos, competencia y economías de escala

Conclusiones

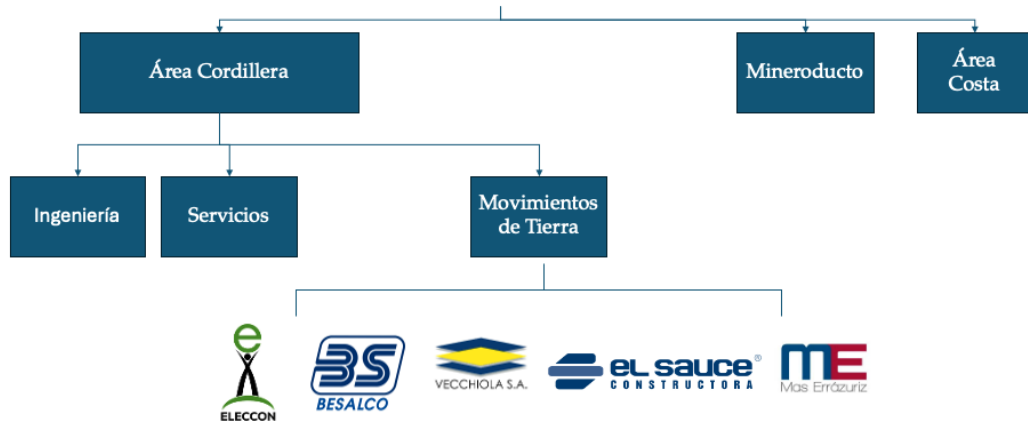
Contexto de las licitaciones en minería

Contexto

La gran minería privada (BHP, Codelco, Collahuasi) externaliza servicios (los licita):

- ▶ La minera arma una lista corta (primer filtro).
- ▶ La minera explica el proyecto, su dificultad, criterios a evaluar en las postulaciones, entre otros factores.
- ▶ La minera busca un precio bajo pero también valora continuidad y seguridad operativa y probabilidad de éxito en las fechas propuestas.





Motivación

La heterogeneidad de las firmas determina la competencia en licitaciones Dos tipos de firmas compiten:

Firma grande (L)

- ▶ Alto overhead
- ▶ Robusta ante complejidad

Firma pequeña (S)

- ▶ Costo base bajo
- ▶ Frágil ante complejidad

Buscamos responder:

¿Quién gana? ¿A qué precio? ¿Cuándo es ineficiente?

Literatura

- ▶ **Vickrey (1961)** — subastas simétricas, equivalencia de ingresos.
- ▶ **Maskin y Riley (2000)** — subastas asimétricas; rompen la equivalencia.
- ▶ **Kaplan y Zamir (2012)** — soluciones analíticas (no elementales) para uniformes.
- ▶ **Hubbard, Kirkegaard y Paarsch (2013)** — método numérico estándar.

Juego Bayesiano Estático para contratistas heterogéneos

El juego: cinco componentes

Juego bayesiano estático (Harsanyi, 1967).

1. Jugadores
2. Tipos privados
3. Creencias
4. Acciones
5. Pagos

1. Jugadores

Dos firmas: $i \in \{L, S\}$.

- ▶ L : firma grande (incumbente).
- ▶ S : firma pequeña (entrante).

El *mandante* (la minera) no es jugador estratégico.

Su regla de adjudicación está fija: gana el que oferta menos (simplificación por ahora).

2. Tipos privados

Cada firma tiene un **costo** privado de ejecución θ_i .

$$\theta_L \in [c_L(d), \bar{c}(d)], \quad \theta_S \in [c_S(d), \bar{c}(d)]$$

- ▶ $d \in [0, 1]$: dificultad del proyecto (información común).
- ▶ Solo la firma i observa su propio θ_i .

La asimetría: dos parámetros

$$c_L(d) = a_L + \gamma_L d, \quad c_S(d) = a_S + \gamma_S d$$

$$a_L > a_S$$

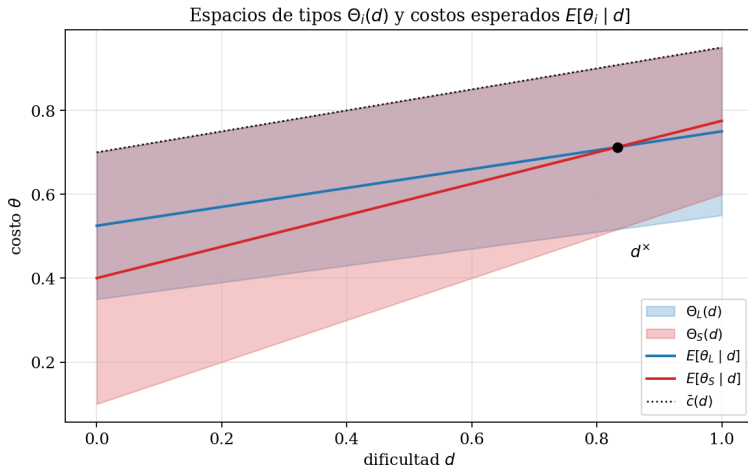
L tiene mayor costo base
(overhead corporativo).

$$\gamma_S > \gamma_L$$

S sufre más con la dificultad
(crece más rápido en costo).

Esta es **toda** la heterogeneidad del modelo.

Visualización de los soportes



Para d bajo: Θ_S más ancho $\Rightarrow S$ es la **firma fuerte**.

Para d alto: roles invertidos.

Punto de cruce $d^x \approx 0,83$.

3. Creencias

$$\theta_i \sim U[c_i(d), \bar{c}(d)]$$

- ▶ Cada firma sabe *su* costo y la *distribución* del rival.
- ▶ **No** sabe la realización del costo del rival.
- ▶ Distribuciones independientes y son conocimiento común.

4. Acciones

Cada firma elige una **oferta** en sobre cerrado:

$$b_i = \beta_i(\theta_i)$$

- ▶ Una *estrategia* es una función $\beta_i : \Theta_i \rightarrow \mathbb{R}_+$.
- ▶ Las ofertas son **simultáneas**.
- ▶ Gana $i^* = \arg \min_i \{b_L, b_S\}$.

5. Pagos

$$\pi_i(\theta_i, b_i, b_j) = \begin{cases} b_i - \theta_i & \text{si gana } (b_i < b_j) \\ 0 & \text{si pierde} \end{cases}$$

Trade-off estratégico de cada firma:

- ▶ Subir $b_i \Rightarrow$ *más* margen si gana.
- ▶ Subir $b_i \Rightarrow$ *menos* probabilidad de ganar.

Beneficio esperado

La firma i con costo θ_i que oferta b_i espera ganar:

$$\Pi_i(\theta_i, b_i) = \underbrace{(b_i - \theta_i)}_{\text{margen}} \cdot \underbrace{\mathbb{P}(b_i < \beta_j(\theta_j))}_{\text{prob. ganar}}$$

Cada firma elige b_i para maximizar esto, anticipando que la rival hace lo mismo. Ganar con probabilidad 1 requeriría ofertar tan bajo que sería óptimo desviarse.

Equilibrio bayesiano de Nash

Un par (β_L^*, β_S^*) es BNE si para cada firma i y cada θ_i :

$$\beta_i^*(\theta_i) \in \arg \max_{b_i \geq 0} (b_i - \theta_i) \cdot \mathbb{P}(b_i < \beta_j^*(\theta_j))$$

Nadie tiene incentivos a desviarse, dado lo que hace el otro.

La condición de primer orden

Tomando CPO en el problema de cada firma y aplicando equilibrio:

$$\phi'_j(b) = \frac{\bar{c} - \phi_j(b)}{b - \phi_i(b)}, \quad i \neq j$$

donde $\phi_i = \beta_i^{-1}$ (función inversa de oferta).

Lo que tenemos:

- ▶ Sistema de dos EDOs acopladas (Maskin y Riley, 2000).
- ▶ Condiciones de frontera: $\phi_L(\bar{c}) = \phi_S(\bar{c}) = \bar{c}$.

El problema

In models of first-price auctions, when bidders are ex ante heterogeneous, deriving explicit equilibrium bid functions is typically impossible. (Hubbard, Kirkegaard y Paarsch, 2013)

- ▶ Kaplan y Zamir (2012): caracterización analítica, pero no elemental.
- ▶ Singularidad en $b = \bar{c}$ (numerador y denominador se anulan).

¿Cómo resolverla?

Solución numérica de un juego

Solución numérica: la idea

Obstáculo: buscamos *funciones*, no números.

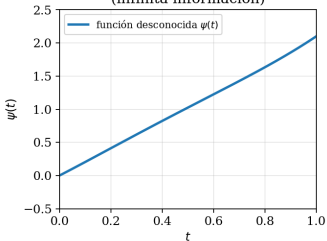
Una función tiene infinitos valores.

Estrategia (Hubbard, Kirkegaard y Paarsch, 2013):

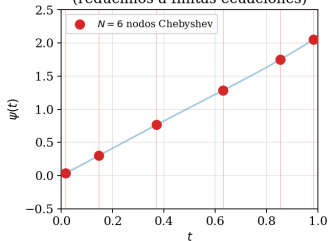
1. Aproximar la función desconocida con un **polinomio**.
2. Imponer la EDO en **algunos puntos** (no en todos).
3. Resolver el sistema algebraico resultante.

La aproximación polinómica

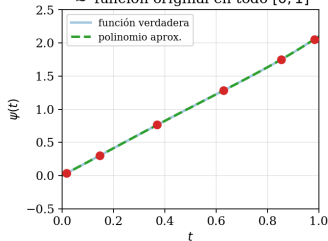
1. Tenemos una función desconocida (infinita información)



2. Imponer la ODE en N puntos (reducimos a finitas ecuaciones)



3. Polinomio que pasa por los nodos $\approx$ función original en todo $[0, 1]$

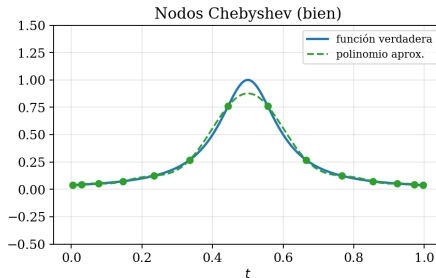
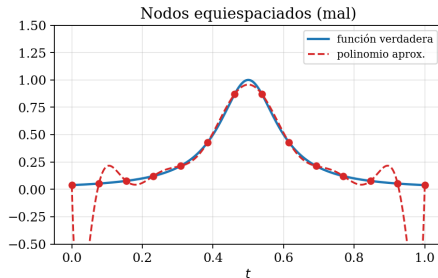


$$\phi_i(b) \approx c_1 b + c_2 b^2 + \cdots + c_K b^K$$

$K = 14$ coeficientes por firma. **Un polinomio reemplaza una función entera.**

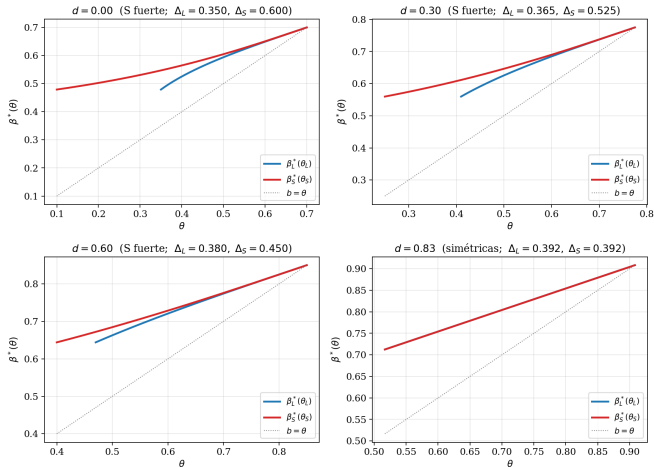
¿En qué puntos imponer la EDO?

¿Por qué Chebyshev? Mismo polinomio de grado 13, distintos puntos de anclaje



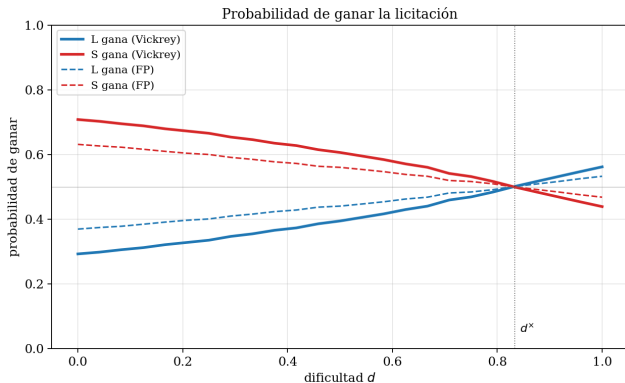
Nodos de Chebyshev: se concentran cerca de los bordes,
evitan oscilaciones espurias.

Resultado 1: las funciones de oferta



La firma fuerte oferta más *agresivamente*. En $d^\times$, las curvas coinciden.

Resultado 2: probabilidad de ganar

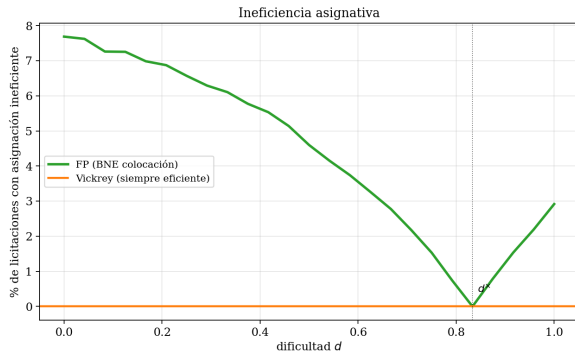


El primer precio *nivela* la asimetría.

En Vickrey, S gana 71 % en $d=0$.

En FP, baja a 63 %.

Resultado 3: ineficiencia



Forma de V con mínimo en d^* : la asimetría genera asignaciones ineficientes,
la simetría las anula.

Extensiones y futuras preguntas de investigación

Extensión: probabilidad de completación

El modelo base supone que el contrato se ejecuta perfectamente. Obvio no pasa

Agregamos: cada firma completa el proyecto con probabilidad $\rho_i(d)$.

- ▶ $\bar{\rho}_L > \bar{\rho}_S$: L es más confiable.
- ▶ $\delta_S > \delta_L$: la confiabilidad de S se deteriora más rápido con d .

Regla de adjudicación ajustada

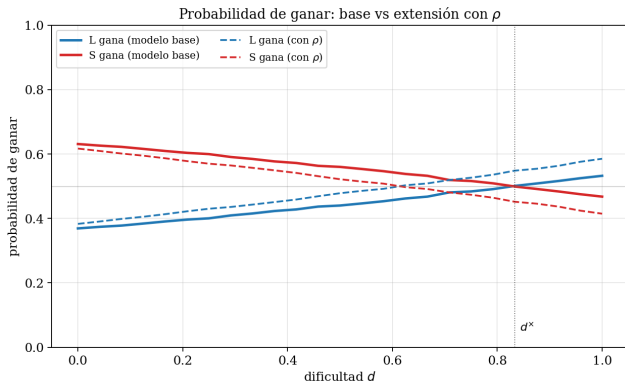
El mandante (neutral al riesgo) minimiza el costo esperado:

$$i^* = \arg \min_{i \in \{L, S\}} \frac{b_i}{\rho_i(d)}$$

Reducción analítica: con la transformación $\tilde{\theta}_i = \theta_i / \rho_i$, $\tilde{b}_i = b_i / \rho_i$, el juego es equivalente a una subasta estándar en el espacio transformado.

$\Rightarrow$ Aplicamos el mismo solver HKP, sin reescribir nada.

Resultado: probabilidad de ganar de L



ρ **amplifica** la ventaja de L .

L gana antes (curva sube más rápido), porque el riesgo de S encarece su oferta efectiva.

Una pregunta de política

A medida que d sube, hay menos firmas con capacidad de bajo costo.
La competencia cae.

Pregunta: ¿se puede *partir* un proyecto difícil en dos partes?

- ▶ Reducir la dificultad efectiva d a algo tipo $d/2$.
- ▶ Más firmas pueden competir en cada parte, debería reducir el precio de adjudicación.
- ▶ *Pero* se pierden economías de escala, aumentan costos de coordinación y transacción.

Ejemplo: licitaciones del Metro

Línea completa de Metro en una sola licitación

- ▶ Proyecto enorme y complejo.
- ▶ Pocas firmas pueden participar (alto d).
- ▶ Menores costos por economía de escala.
- ▶ Si es que la empresa licitada tiene problemas afecta todo el proyecto.

Tramos en licitaciones separadas

- ▶ Cada licitación es manejable.
- ▶ Más firmas compiten en cada una.
- ▶ *Pero* costo por estación es mayor.

¿Qué configuración minimiza el costo total para el mandante?

Modelamiento formal: juego de dos etapas

La minera pasa a ser **jugador estratégico**.

Etapas 1 (minera): elige el número de paquetes $n \in \{1, 2, \dots, \bar{n}\}$ en que dividir el proyecto.

Etapas 2 (firmas): en cada paquete, juegan la subasta asimétrica del modelo base con dificultad reducida $d_n = D/n$.

Resolución por inducción hacia atrás:

- ▶ Etapa 2: BNE asimétrico vía colocación HKP en cada paquete.
- ▶ Etapa 1: la minera anticipa el precio de equilibrio y elige n^* .

Etapla 2: el subjuego de licitación

Dado n , en cada paquete:

- ▶ Dificultad efectiva: $d_n = D/n$.
- ▶ Soportes: $\Theta_i(d_n) = [c_i(d_n), \bar{c}(d_n)]$.
- ▶ Número de firmas activas: $N(d_n)$, con $N'(d) < 0$.

El BNE genera un precio esperado por paquete:

$$p^*(d_n) = \mathbb{E}[\text{precio}^{FP} \mid d_n, N(d_n)]$$

Ya sabemos resolver esto con el método HKP.

Etapla 1: el problema de la minera

La minera elige n minimizando el costo total esperado:

$$n^* \in \arg \min_{n \geq 1} \underbrace{n \cdot p^*(d_n)}_{\text{precio licitaciones}} \cdot \underbrace{(1 + \alpha (n - 1))}_{\text{pérdida de escala}} + \underbrace{F n}_{\text{costos administrativos}}$$

- ▶ $\alpha > 0$: intensidad de las economías de escala.
- ▶ $F > 0$: costo fijo por licitación adicional.

El trade-off, descompuesto

Subir n :

- ↑ *Más competencia*: d_n baja $\Rightarrow N(d_n)$ sube $\Rightarrow p^*(d_n)$ baja.
- ↑ *Menos asimetría*: con d_n chico, S vuelve a ser competitiva.
- ↓ *Pérdida de escala*: factor $(1 + \alpha(n - 1))$.
- ↓ *Costos administrativos*: factor $F n$.

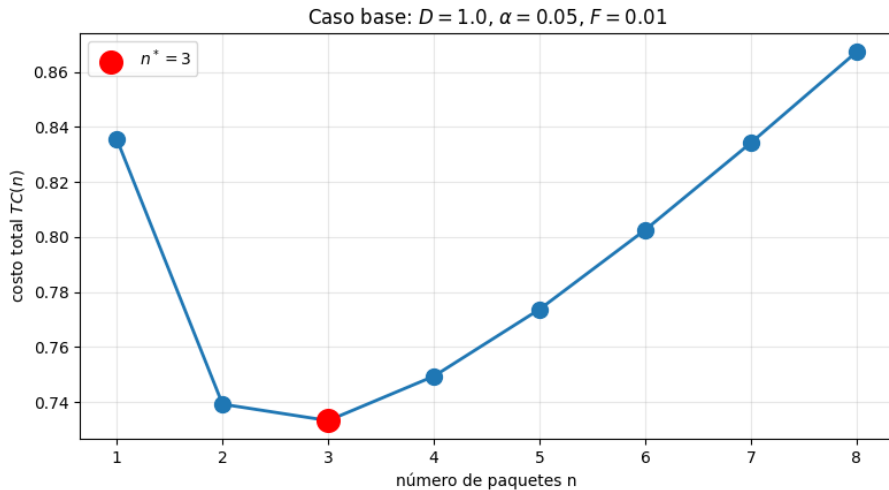
Existe un n^* interior bajo condiciones razonables sobre $\alpha, F, N(\cdot)$.

Predicciones y conexión empírica

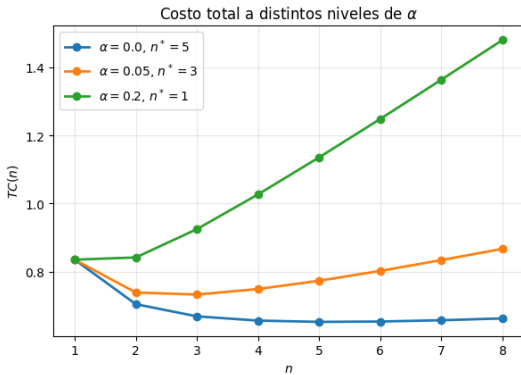
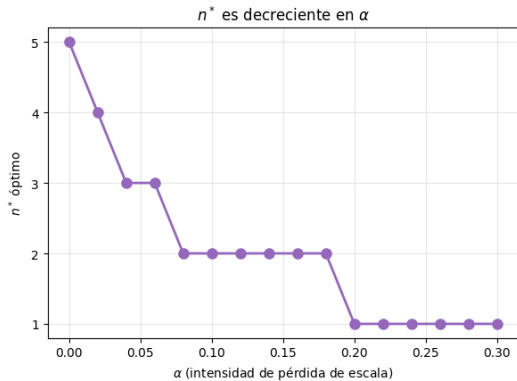
El modelo entrega **predicciones contrastables**:

- ▶ n^* es *creciente* en D (proyectos más difíciles, más conviene partir).
- ▶ n^* es *decreciente* en α (mucha escala, pocas piezas).
- ▶ En el extremo $\alpha = 0$: $n^* = \bar{n}$ (atomizar todo).
- ▶ En el extremo $\alpha \rightarrow \infty$: $n^* = 1$ (un solo contrato grande).

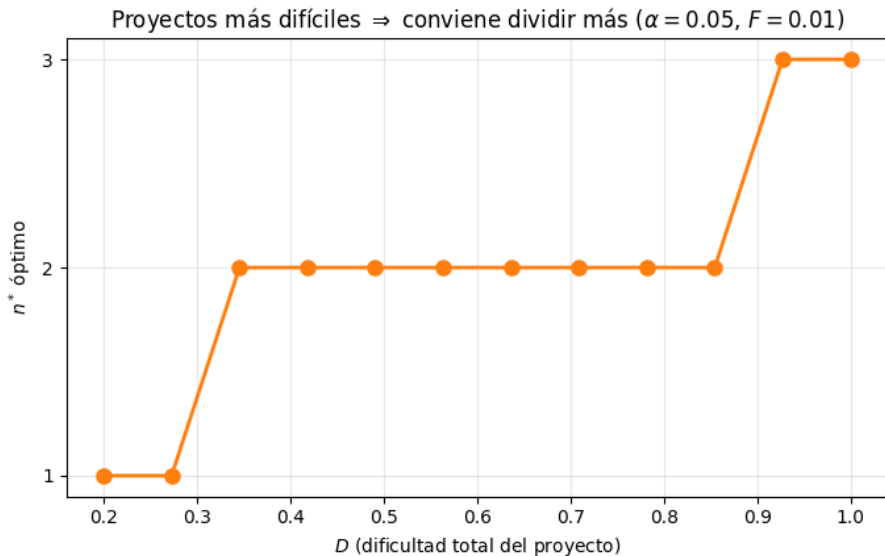
Resultados preliminares



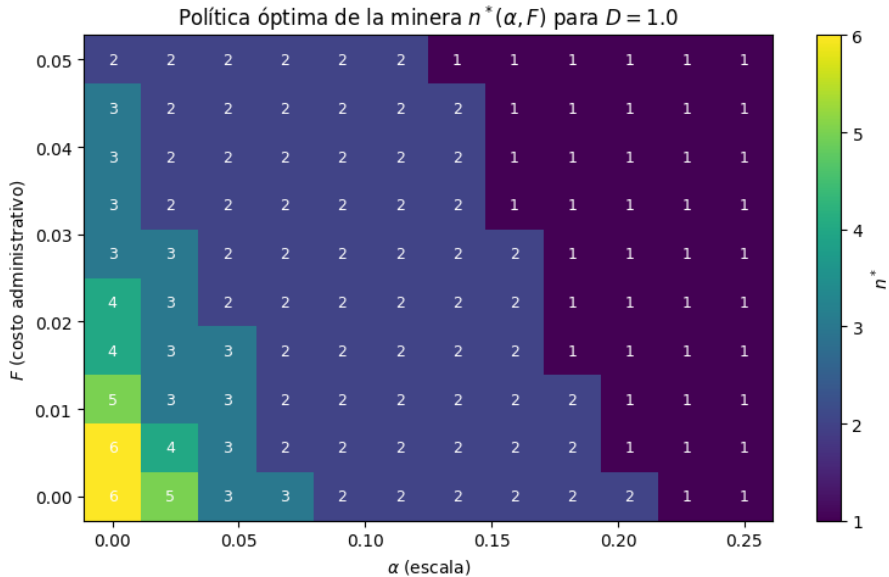
Resultados preliminares



Resultados preliminares



Resultados preliminares



Conclusiones

Conclusiones

1. **Ventaja comparativa endógena** en torno a $d^{\times}$.
2. **Markup asimétrico**: la fuerte oferta agresivo, la débil cobra alto.
3. **Ineficiencia moderada** (0–8 %), nula en simetría.
4. **La confiabilidad amplifica la asimetría**: ρ adelanta el dominio de L .
5. **Pregunta abierta**: dividir proyectos difíciles para activar competencia, a costa de escala.